Analysis I

Ein Aufschrieb der Vorlesung *Analysis I* an der Uni Karlsruhe im Wintersemester 1998/99, gelesen von Priv.-Doz. Dr. G. Herzog.

GeTEXt von Andreas Klöckner (ak@ixion.net). Für Kommentare und Berichtigungen bin ich jederzeit dankbar. Neue Versionen gibt es unter http://www.ixion.net/ak/aufschrieb.

Copyright (c) 2000 Andreas Klöckner. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, with the Front-Cover Texts being the first two paragraphs of this title page, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

LaTeX-Lauf am 23. Februar 2006. "Nach der Klausur"-Edition, so wenige Fehler wie noch nie!

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Definition 1.1 Körper

Ein Körper $(\mathbb{K};+;\cdot)$ ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für die die folgenden Axiome gelten:

(1) $(\forall a,b,c \in \mathbb{K})((a+b)+c = a+(b+c))$ (*Assoziativgesetz* $+$)

(2) $(\exists 0 \in \mathbb{K})(\forall a \in \mathbb{K})(a+0=a)$ (*Neutralelement* $+$)

(3) $(\forall a \in \mathbb{K})(\exists(-a) \in \mathbb{K})(a+(-a)=0)$ (*Inverses* $+$)

(4) $(\forall a,b,c, \in \mathbb{K})(a+b=b+a)$ (*Kommutativgesetz* $+$)

(5) $(\forall a,b,c \in \mathbb{K})((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c))$ (*Assoziativgesetz* $\cdot$)

(6) $(\exists 1 \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(\forall a \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(1\cdot a = a)$ (*Neutralelement* $\cdot$)

(7) $(\forall a \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(\exists a^{-1} \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(a\cdot a^{-1}=1)$ (*Inverses* $\cdot$)

(8) $(\forall a,b \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(a\cdot b = b\cdot a)$ (*Kommutativgesetz* $\cdot$)

(9) $(\forall a,b,c \in \mathbb{K})(a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c)$ (*Distributivgesetz*)

Bemerkung

Insbesondere ist $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ein Körper. Alle bekannten Rechenregeln lassen sich aus den obigen Axiomen ableiten.

Definition 1.2 Kurzschreibweisen

Der Kürze halber definiert man folgende Schreibweisen:

$$\begin{aligned} ab &:= a\cdot b \\ a-b &:= a+(-b) \\ \frac{a}{b} &:= a\cdot b^{-1} \qquad (b\neq 0) \end{aligned}$$

Definition 1.3 Anordnung

Eine Menge M heißt angeordnet, wenn eine Relation “$\leq$” gegeben ist, die die folgenden Axiome erfüllt:

(1) $(\forall a,b \in M)(a\leq b \vee b\leq a)$

(2) $(\forall a,b \in M)((a\leq b \wedge b\leq a) \implies a=b)$

(3) $(\forall a,b,c \in M)((a\leq b \wedge b\leq c) \implies a\leq c)$ (Transititivität)

(4) $(\forall a, b, c \in M)(a \leq b \implies a + c \leq b + c)$

(5) $(\forall a, b, c \in M)((a \leq b \wedge 0 \leq c) \implies ac \leq bc)$

Definition 1.4 Kurzschreibweisen

Für die Anordnung definiert man weiterhin:

$$b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$$
$$a < b :\Leftrightarrow \neg(a \geq b)$$
$$b > a :\Leftrightarrow a < b$$

Bemerkung

Es ist einfach zu zeigen, daß sämtliche obigen Axiome auch mit den obigen Kurzschreibweisen gelten.

Definition 1.5 Betrag

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist der Betrag von a:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Hilfssatz

Voraussetzung: $a, b \in \mathbb{R}$

Es gelten:

$$|a - b| = |b - a|$$
$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$
$$|a| = |-a|$$
$$|a||b| = |ab|$$
$$\pm a \leq |a|$$
$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$
$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

Definition 1.6 Beschränktheit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Dann heißt M nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkt $:\Leftrightarrow$

$$(\exists \gamma \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \underset{\geq}{\overset{\leq}{}} \gamma)$$

Dann heißt γ $\substack{\text{obere}\\\text{untere}}$ Schranke.

M heißt beschränkt :⇔ M ist nach oben und unten beschränkt.

Definition 1.7 Infimum/ Supremum und Minimum/ Maximum

γ heißt $\substack{\text{Supremum}\\\text{Infimum}}$:⇔

$$(\forall \tilde{\gamma} \in \mathbb{R})(\tilde{\gamma} \, \substack{\text{OS}\\ \\ \text{US}} \implies \tilde{\gamma} \substack{\geq\\-\\\leq} \gamma)$$

Kurzschreibweise: $\gamma = \substack{\sup\\\inf} M$.

Gilt $\substack{\sup\\\inf} M \in M$, so nennt man $\substack{\sup\\\inf} M$ auch gleichzeitig $\substack{\text{Minimum}\\\text{Maximum}}$ von M.

Kurzschreibweise: $\gamma = \substack{\min\\\max} M$.

Definition 1.8 Intervall

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ heißt offenes,
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ und
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes und
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ geschlossenes Intervall von a bis b.

Definition 1.9 Vollständigkeitsaxiom

Ein Axiom fehlt noch zur Bestimmung der reellen Zahlen, das Vollständigkeitsaxiom:

$$(\forall M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset)(M \text{ nach oben beschränkt} \implies \exists \sup M)$$

Satz 1.1

Voraussetzung: $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset, M$ nach unten beschränkt

Dann existiert $\inf M$.

Hilfssatz

Voraussetzung: $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$

M ist beschränkt :⇔ $(\exists c > 0)(\forall x \in M)(|x| < c)$.

Satz 1.2

Voraussetzung: $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R})$

Dann gilt das folgende:

(1) A ist beschränkt $\Leftrightarrow \inf A \leq \sup A$

(2) A ist nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkt $\implies$ B ist nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkt und $\substack{\sup B \leq \sup A\\ \inf B \geq \inf A}$.

(3) A ist nach $\substack{\text{oben}\\\text{unten}}$ beschränkt und γ eine $\substack{\text{obere}\\\text{untere}}$ Schranke von A $\implies$ $\gamma = \substack{\sup\\\inf} A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x \substack{>\\<} \gamma - \varepsilon)$

2 Natürliche Zahlen

Definition 2.1 Induktionsmenge

$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt Induktionsmenge/IM/induktiv, wenn die folgenden Axiome gelten:

(1) $1 \in A$

(2) $x \in A \implies x + 1 \in A$

Definition 2.2 Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind wie folgt festgelegt:

$\mathbb{N} := \bigcap\limits_{A \text{IM}} A.$

Satz 2.1

Dann gelten

(1) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

(2) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

(3) $x \in \mathbb{R} \implies (\exists n \in \mathbb{N})(n > x)$

(4) $A \subseteq \mathbb{N} \land A$ Induktionsmenge $\implies A = \mathbb{N}$ (Prinzip der vollst. Induktion)

Bemerkung Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Für jedes $a \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ definiert. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Kann man zeigen, daß $A(1)$ richtig ist und $A(n) \implies A(n+1)$, so ist A Induktionsmenge. Weil $A \subseteq \mathbb{N}$ und A Induktionsmenge ist, gilt $A = \mathbb{N}$. $A(n)$ gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Hilfssatz Wohlordnungsprinzip für die nat. Zahlen

Voraussetzung: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$

Dann existiert $\min M$.

Definition 2.3 Ganze Zahlen,Brüche

Die folgenden Mengen bauen auf den natürlichen Zahlen auf:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{Z} &:= \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}_0 \\ \mathbb{Q} &:= \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Satz 2.2

Voraussetzung: $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

Dann existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

3 Folgen/Abzählbarkeit

Definition 3.1 In-/Sur-/Bijektivität

Seien A, B beliebige Mengen, wobei $A \neq \emptyset \neq B$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann ist

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

die Bildmenge von f. f heißt dann

(1) injektiv $:\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

(2) surjektiv $:\Leftrightarrow f(A) = B$

(3) bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv

Definition 3.2 Folge

Sei $A \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to A$ heißt Folge in A. Schreibweise:

$$a_n := a(n) \qquad \text{(“n-tes Folgenglied”)}$$

$$(a_n), (a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_1, a_2, \ldots) := a$$

Definition 3.3 endlich,unendlich,abzählbar

Sei $X \neq \emptyset$ beliebige Menge.

(1) X heißt endlich $:\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(\exists f : \{1, \ldots, n\} \to X)(f$ surjektiv$)$

(2) X heißt unendlich $:\Leftrightarrow X$ ist nicht endlich.

(3) X heißt abzählbar $:\Leftrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to X)(f$ surjektiv$)$

(4) X heißt abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow X$ ist abzählbar und unendlich.

(5) X heißt überabzählbar $:\Leftrightarrow X$ ist nicht abzählbar, aber unendlich.

Bemerkung

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Die Menge aller Folgen in $\{0, 1\}$ ist überabzählbar.

Satz 3.1

Voraussetzung: $\emptyset \neq B \supseteq A$ abzählbar

Dann ist auch B abzählbar.

Satz 3.2

Voraussetzung: $X_1, X_2, X_3 \ldots$ abz. viele Mengen

$\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ abzählbar

4 Einige Formeln

Satz 4.1 Summenformel

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Definition 4.1 Natürliche Potenzen

Sei $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^n := \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots}^{n\text{-mal}}$ und $a^0 := 1$.

Definition 4.2 Fakultät

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ und $0! := 1$.

Definition 4.3 Binomialkoeffizient

Sei $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$. Dann ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Satz 4.2

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$

Dann gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$$

Satz 4.3 Bernoulli'sche Ungleichung

Voraussetzung: $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$

Es gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Satz 4.4 Allgemeine 3. binomische Formel

Voraussetzung: $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$

In Verallgemeinerung von $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Insbesondere $a = 1, t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

Satz 4.5 Binomialformel

Voraussetzung: $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$

Es gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Hilfssatz Monotonie natürlicher Potenzen

Voraussetzung: $x, y \geq 0; n \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$x \leq y \implies x^n \leq y^n$$

5 Wurzeln

Definition 5.1 Wurzel

Sei $a \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Dann ex. ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = a$. Schreibweise: $x = \sqrt[n]{a}$.

Definition 5.2 Rationale Potenzen

Sei $a \geq 0; r = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Diese Darstellung ist unabhängig davon, ob $\frac{m}{n}$ gekürzt ist oder nicht.

Definition 5.3 Negative Potenzen

Sei $a > 0; r \in \mathbb{Q}; r < 0$. Dann ist

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}$$

6 Konvergente Folgen

Definition 6.1 Beschränktheit einer Folge

(a_n) heißt beschränkt (nach oben/unten):$\Leftrightarrow$ die Bildmenge beschränkt ist (nach oben/unten).

Analog übertragen sich die Definitionen von $\min, \max, \inf, \sup$.

Definition 6.2 Epsilon-Umgebung

Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Dann heißt $U_\varepsilon(x_0)$ die ε-Umgebung von x_0.

$$U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Definition 6.3 Konvergenz einer Folge

Sei (a_n) eine reelle Folge. (a_n) heißt konvergent $:\Leftrightarrow$

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N})(a_n \in U_\varepsilon(a))$$

Ist (a_n) konvergent, so heißt a Grenzwert/GW von (a_n). Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Satz 6.1

Voraussetzung: (a_n) konvergente reelle Folge

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist eindeutig bestimmt.

(2) (a_n) ist beschränkt.

Bemerkung

In Konvergenzfragen kommt es auf endlich viele Folgenglieder nicht an.

Beispiel

(1) $c \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(3) (n) ist divergent.

(4) $((-1)^n)$ ist divergent.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Definition 6.4 Folge (II)

Sei $k \in \mathbb{Z}$ fest. Eine Fkt. $a : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\} \to X \neq \emptyset$ heißt ebenfalls Folge.

Schreibweise: $(a_n)_{n\geq k}$ oder $(a_n)_{n\geq k}^{\infty}$

Definition 6.5 für fast alle

Sei $k, n \in \mathbb{Z}$, $A(n)$ eine Aussage für alle $n \geq k$. Dann sagt man:

$A(n)$ gilt für fast alle $n \geq k$ $:\Leftrightarrow$ $(\exists n_0 \geq k)(\forall n \geq n_0)(A(n)\text{gilt})$.

Satz 6.2

Voraussetzung: $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen

Dann gilt

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \wedge |a_n - a| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ $(\not\Leftarrow)$

Sei nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt weiter:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(4) $b \neq 0 \implies (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(b_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b})$

(5) $a_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$

(6) $a = b \wedge a_n \leq c_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

Beispiel

Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Definition 6.6 Monotonie

a_n sei reelle Folge.

(1) (a_n) heißt monoton wachsend $:\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \geq a_n)$

(2) (a_n) heißt monoton fallend $:\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$

(3) (a_n) heißt monoton $:\Leftrightarrow (a_n)$ monoton wachsend $\vee$ fallend

(4) (a_n) heißt streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} > a_n)$

(5) (a_n) heißt streng monoton fallend $:\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} < a_n)$

Satz 6.3 Monotoniekriterium

Voraussetzung: (a_n) sei monoton $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$ und nach $\substack{\text{oben} \\ \text{unten}}$ beschränkt

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \substack{\sup a_n \\ \inf a_n}$.

7 Wichtige Beispiele

Satz 7.1

Voraussetzung: $p \in \mathbb{N}, (a_n)$ reelle Folge, $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq 0), \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.

Satz 7.2

Voraussetzung: $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n := x^n$

(1) $x = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $x = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(3) $x = -1$: (a_n) divergent

(4) $|x| > 1$: (a_n) divergent

(5) $|x| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Satz 7.3

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Satz 7.4

Voraussetzung: $c > 0$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Satz 7.5

Voraussetzung: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Dann sind $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Definition 7.1 Eulersche Zahl e

Man legt fest $e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

8 Teilfolgen und Häufungswerte

Definition 8.1 Teilfolge

Sei (a_n) Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. $b_n := a_{\varphi(n)}$ heißt dann Teilfolge von a_n.

Definition 8.2 Häufungswert

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert/HW von $(a_n) :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(a_n \in U_\varepsilon(\alpha))$ gilt für unendlich viele Folgenglieder.

Bemerkung

Jede reelle Zahl ist Häufungswert der rationalen Zahlen.

Satz 8.1

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge

(1) α ist HW von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge von (a_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies \forall$ Teilfolgen (a_{n_k}) von (a_n): $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

(3) (a_n) konvergent $\implies$ (a_n) hat genau einen HW, nämlich den Grenzwert.

Satz 8.2

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge

Es gibt eine monotone Teilfolge von (a_n).

Satz 8.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Voraussetzung: (a_n) beschränkte reelle Folge

(a_n) hat mindestens einen Häufungswert.

9 Oberer und unterer Limes

Definition 9.1

Sei (a_n) eine reelle Folge. $H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ ist HW von } (a_n)\}$

Satz 9.1

Voraussetzung: (a_n) beschränkte reelle Folge

(1) $H(a_n)$ ist beschränkt.

(2) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n) \Leftrightarrow \exists \min H(a_n), \max H(a_n)$. (Wegen Satz 8.3: $H(a_n) \neq \emptyset$)

Definition 9.2 limsup / liminf

Sei (a_n) beschränkte reelle Folge. Dann heißt

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \max H(a_n)$ (limes superior/oberer Limes)

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \min H(a_n)$ (limes inferior/unterer Limes)

Satz 9.2

Voraussetzung: (a_n) beschränkte reelle Folge, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha = \liminf a_n \Leftrightarrow & (\forall \varepsilon > 0)(\alpha - \varepsilon < a_n) \text{ f.f.a. } n \in \mathbb{N} \wedge \\
& (\forall \varepsilon > 0)(a_n < \alpha + \varepsilon) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\
\alpha = \limsup a_n \Leftrightarrow & (\forall \varepsilon > 0)(\alpha - \varepsilon < a_n) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \wedge \\
& (\forall \varepsilon > 0)(a_n < \alpha + \varepsilon) \text{ f.f.a. } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Satz 9.3

Voraussetzung: (a_n) beschränkte reelle Folge, $\alpha \in \mathbb{R}$

Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) (a_n) hat genau einen HW.

(3) (a_n) ist konvergent.

Hilfssatz

Voraussetzung: $(a_n), (b_n)$ beschränkte reelle Folgen

(1) $a_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N} \implies \begin{matrix} \limsup\limits_{n\to\infty} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} \end{matrix} a_n \leq \begin{matrix} \limsup\limits_{n\to\infty} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} \end{matrix} b_n$

(2) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

$\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\alpha \geq 0 \implies \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

(4) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

(5) $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

10 Das Cauchy-Kriterium

Definition 10.1 Cauchy-Folge

Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge :⇔

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Satz 10.1 Cauchy-Kriterium

(a_n) ist konvergent ⇔ (a_n) ist Cauchy-Folge.

Bemerkung

(a_n) ist Cauchy-Folge ⇔

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon)$$

11 Unendliche Reihen

Definition 11.1 Reihe

Sei (a_n) reelle Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Die Folge (s_n) heißt unendliche Reihe (kurz:Reihe) und wird bezeichnet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(s_n) heißt (n-te) Teilsumme der Reihe.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt $\begin{matrix}\text{konvergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}$:⇔ (s_n) ist $\begin{matrix}\text{konvergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}$.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} s_n$ der Reihenwert/die Reihensumme.

Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$

Bemerkung

Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine reelle Folge, so def. man entsprechend: $s_n := \sum_{i=p}^{n} a_i$ und $\sum_{n=p}^{\infty}$. Die folgenden Sätze und Definitionen übertragen sich entsprechend.

Beispiel Geometrische Reihe

Für $|x| < 1$ ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Beispiel Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Bemerkung

$\mathbb{Q}$ kann von abzählbar vielen Intervallen mit bel. kleiner Längensumme überdeckt werden.

Satz 11.1

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge

(1) $a_n \geq 0$ und (s_n) beschränkt $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. (*Monotoniekriterium*)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))(\forall m, n)(m > n \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon)$$

(*Cauchykriterium*)

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Longrightarrow$ $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\sum\limits_{n=\nu}^{\infty} a_n$ konv.).

Weiterhin gilt für $\nu \to \infty$ auch $\sum\limits_{n=\nu}^{\infty} a_n \to 0$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Satz 11.2 Linearität von Reihen

Voraussetzung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ konv. Reihen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Bemerkung

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ kann konvergieren, obwohl $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergieren.

Definition 11.2 Absolute Konvergenz

Eine Reihe heißt absolut konvergent :$\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 11.3 Dreiecksungleichung für Reihen

Voraussetzung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolut konvergent

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und es gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

12 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 12.1 Leibniz-Kriterium

Voraussetzung: (a_n) monoton fallende Nullfolge, $b_n = (-1)^{n+1} a_n$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Satz 12.2 Majorantenkriterium

Voraussetzung: $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

Dann konv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Hilfssatz Minorantenkriterium

Voraussetzung: $0 \leq b_n \leq a_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beispiel

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Bemerkung

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Satz 12.3 Wurzelkriterium

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge

(1) Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt, so div. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt, so ex. $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(3) $\alpha < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut

(4) $\alpha = 1$: keine Aussage möglich

(5) $\alpha > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Bemerkung

$\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt im allgemeinen nicht für Konvergenz.

Satz 12.4 Quotientenkriterium

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge mit $a_n \neq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$

(1) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ beschränkt, $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konv.

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N} \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

(3) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ beschränkt, $\liminf\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Bemerkung

Ist (a_n) Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$ beschränkt, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$$

Liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung, so braucht man es mit dem Wurzelkriterium gar nicht erst zu versuchen, d.h. das Quotientenkriterium ist das "empfindlichere Werkzeug".

Beispiel Exponentialfunktion

$E(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. (Quotientenkriterium)

Es gilt $E(0) = 1, E(1) = e$.

Bemerkung Klammern in Reihen

In konverg. Reihen darf man im allgemeinen "Klammern" nicht weglasssen, ohne die Konvergenz zu beeinflussen. Hinzufügen von Klammern ist jedoch kein Problem, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 12.5

Voraussetzung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, (n_k) streng wachsende Folge in $\mathbb{N}$

Setze $b_1 := a_1 + \cdots + a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}$ ....

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ und es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

13 Umordnung von Reihen

Definition 13.1 Umordnung

Sei (a_n) reelle Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$.

Dann heißt (b_n) Umordnung von (a_n) und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ Umordnung von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung

Die Relation "ist Umordnung von" ist symmetrisch.

Hilfssatz

Voraussetzung: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, $n_0 \in \mathbb{N}$

Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $(\forall n \geq n_0)(\varphi(n) \geq n_0)$.

Satz 13.1 Umordnungssatz

Voraussetzung: (b_n) Umordnung von (a_n)

(1) (a_n) konvergiert $\implies$ (b_n) konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. absolut und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Hilfssatz Riemann'scher Umordnungssatz

Voraussetzung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent

(1) Es ex. eine divergente Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann ex. eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konv. und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$.

Bemerkung

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ Jede Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (gegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$).

Definition 13.2 Produktreihe

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konv. Reihen. Sei $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $a_j b_k = p_{\Phi(j,k)}$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ heißt dann Produktreihe von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Bemerkung

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n$ zwei solche Produktreihen, dann ist jede Umordnung der anderen.

Satz 13.2

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ abs. konv., $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ sei eine ihrer Produktreihen.

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konv absolut und $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Definition 13.3 Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Sei weiterhin $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 13.3

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ abs. konv., $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sei ihr Cauchyprodukt

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv. absolut und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

Bemerkung Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Aus (13.3) ergibt sich die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion:

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$$

14 Potenzreihen

Definition 14.1 Potenzreihe

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe/PR.

Satz 14.1

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe

(1) Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt, so konv. die PR nur für $x = 0$.

(2) Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt, so ex. $\varrho := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

(3) $\varrho = 0 \implies$ PR konv. abs. für alle $x \in \mathbb{R}$

(4) $\varrho > 0 \implies$ PR konv. abs. für alle $|x| < \frac{1}{\varrho}$ und div. für alle $|x| > \frac{1}{\varrho}$. Für $|x| = \frac{1}{\varrho}$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Definition 14.2 Konvergenzradius

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und ϱ wie oben. Dann heißt

$$r := \begin{cases} 0 & \sqrt[n]{|a_n|} \text{unbeschränkt} \\ \infty & \sqrt[n]{|a_n|} \text{beschränkt und } \varrho = 0 \\ \frac{1}{\varrho} & \sqrt[n]{|a_n|} \text{beschränkt und } \varrho > 0 \end{cases}$$

der Konvergenzradius/KR der PR.

Definition 14.3 Konvergenzbereich

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und r ihr KR. Dann heißt die Menge

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konv.} \right\}$$

der Konvergenzbereich/KB der PR.

Bemerkung

In Abhängigkeit von r hat der KB folgende Gestalt:

$$KB = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } r = 0 \\ \mathbb{R} & \text{falls } r = \infty \\ {}^{(}_{[} - r, r {}^{)}_{]} & \text{falls } r \in (0; \infty) \end{cases}$$

Definition 14.4 Sinus/Cosinus

Sinus und Cosinus werden hier über ihre Potenzreihenentwicklung festgelegt:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Die beiden Potenzreihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 14.2

Voraussetzung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ PR mit KRen $r_1, r_2 > 0$.

Sei $R := \min\{r_1, r_2\}$, $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann ist der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mindestens R und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

Satz 14.3

Voraussetzung: $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(E(x)E(y) = E(x+y))$

(2) $E(0) = 1 \quad E(1) = e$

(3) $(\forall r \in \mathbb{Q})(E(r) = e^r)$

(4) $(\forall x \in \mathbb{Q})(E(-x) = \frac{1}{E(x)} \wedge E(x) > 0)$

(5) $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend

15 g-adische Entwicklung

Definition 15.1 Gauß-Klammer

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ex. genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq a \leq k+1$.

Dann ist $[a] := k$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich a.

Konvention für Kapitel 15

$a \geq 0 \quad g \in \mathbb{N} \quad g > 1$

Definition 15.2 g-adische Entwicklung

Ist die Zahl $a \in \mathbb{R}$ gegeben, so erhält man die g-adische Entwicklung von a durch diese Folge:

$$\begin{aligned} z_0 &:= [a] \\ z_{n+1} &:= \left[\left(a - z_0 - \frac{z_1}{g} - \cdots \frac{z_n}{g^n}\right) g^{n+1}\right] \end{aligned}$$

Satz 15.1

Voraussetzung: $a \in \mathbb{R}, (z_n)_{n=0}^{\infty}$ die g-adische Entwicklung von a

(1) $z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} + \frac{1}{g^n}$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(z_n \in \mathbb{N}_0)$

(3) $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(z_n \leq g - 1)$

(4) Die Folge (z_n) ist bei festem a eindeutig bestimmt.

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = a$

Definition 15.3 g-adische Schreibweise

Seien $a \in \mathbb{R}, (z_n)_{n=0}^{\infty}$ die g-adische Entwicklung von a. Dann schreibt man

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

Satz 15.2

Voraussetzung: $a \in \mathbb{R}, (z_n)_{n=0}^{\infty}$ die g-adische Entwicklung von a

$(z_n) = g - 1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ ist nicht möglich.

Satz 15.3

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

16 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 16.1 Häufungspunkt

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt x_0 Häufungspunkt/HP von D $:\Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(D \cap U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset)$

Bemerkung

Endliche Mengen haben keinen Häufungspunkt.

Hilfssatz

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 ist HP von D $\Leftrightarrow$ Es ex. eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Konvention für Kapitel 16

$D \subseteq \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von D.

Definition 16.2 Grenzwert einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt a der Grenzwert von f $:\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\})(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)$$

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} = a$ oder $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$.

Bemerkung

Falls $x_0 \in D$, so ist der Funktionswert an dieser Stelle nicht relevant. Für Existenz und Größe von $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ist nur das Verhalten von f in der "Nähe" von x_0 relevant.

Definition 16.3 Einseitige Grenzwerte

Man legt fest

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$$

Satz 16.1 Epsilon-Delta-Charakterisierung des Grenzwert

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

Es ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))(\forall x \in D \setminus \{x_0\})(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Satz 16.2 Folgen-Charakterisierung des Grenzwerts

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}$

Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\})(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies (f(x_n)) \text{ konvergiert})$$

Satz 16.3

Voraussetzung: $f, g, h : D \to \mathbb{R}, \exists a := \lim_{x \to x_0} f(x), \exists b := \lim_{x \to x_0} g(x)$

Für $x \to x_0$:

(1) $f(x) + g(x) \to a + b$, $f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b$, $|f(x)| \to |a|$

(2) $(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})(f(x) \leq g(x)) \implies a \leq b$

(3) $(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})(f(x) \leq h(x) \leq g(x)), a = b \implies h(x) \to a$

(4) $b \neq 0 \implies (\exists \delta > 0)(\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})(|g(x)| > \frac{|b|}{2}) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b}$

Definition 16.4

Sei (x_n) reelle Folge. Dann sagt man

$$x_n \to \infty :\Leftrightarrow (\forall c \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n > c)$$
$$x_n \to -\infty :\Leftrightarrow (\forall c \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n < c)$$

Definition 16.5

Sei $D \subseteq \mathbb{R} : f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist $\lim f(x) = \pm\infty :\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\})(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \pm\infty)$$

Definition 16.6

$D \subseteq \mathbb{R}$ sei nicht nach $\substack{\text{oben} \\ \text{unten}}$ beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ f(x)=a $:\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n) \text{ in } D)(\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)$$

($a = \pm\infty$ zugelassen)

Beispiel

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} E(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = 0$.

17 Stetigkeit

Definition 17.1 Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$. f heißt stetig in $x_0 \in D$ $:\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n) \text{ in } D)(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0))$$

Schreibweise: $f \in \mathrm{C}(D)$, wobei $\mathrm{C}(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ ist auf D stetig}\}$

Satz 17.1 Epsilon-Delta-Charakterisierung der Stetigkeit

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$

(1) f stetig in $x_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)\ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

(2) x_0 HP von D $\implies$ f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Satz 17.2

Voraussetzung: $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g seien stetig in $x_0 \in D$.

Dann sind auch $f + g, f \cdot g, |f|$ stetig. Ist $\tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}, x_0 \in \tilde{D}$, so ist $\frac{f}{g}$ auch stetig in x_0.

Somit ist $\mathrm{C}(D)$ ein Vektorraum.

Satz 17.3

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig in x_0, $g : E \to \mathbb{R}$, wobei $f(D) \subseteq E$, g stetig in $f(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0.

Satz 17.4

Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$ sind stetig.

Bemerkung

$E(x)$, $\sin x$, $\cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

18 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 18.1 Zwischenwertsatz

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a;b])$ und $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y_0 \geq f(b)$

Dann existiert ein $x_0 \in [a;b]$ mit $f(x_0) = y_0$).

Satz 18.2 Nullstellensatz von Bolzano

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a;b])$ und $f(a) < 0 < f(b)$

Dann existiert ein $x_0 \in (a;b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Bemerkung

$E(\mathbb{R}) = (0;\infty)$

Definition 18.1 abgeschlossen/offen

$D \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow (\forall (x_n) \text{ in } D)(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in D)$

$D \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen $:\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus D$ ist abgeschlossen.

Bemerkung

$\mathbb{R}$ ist offen und abgeschlossen, $[a,b)$ ist weder offen noch abgeschlossen. Das bedeutet, offen und abgeschlossen sind bei Mengen keine Gegensätze, während dies im allgemeinen z.B. bei Türen der Fall ist. :-)

Hilfssatz

D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder HP von $D \in D$

D ist offen $\Leftrightarrow (\forall x \in D)(\exists \delta > 0)(U_\delta(x) \subseteq D)$

Hilfssatz

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, (x_n) sei Folge in D

(x_n) enthält konvergente TF in D. ("D ist folgenkompakt.")

Definition 18.2 Beschränktheit einer Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls $f(D)$ beschränkt ist.

Satz 18.3

Voraussetzung: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, D abgeschlossen, beschränkt. $f \in \mathrm{C}(D)$

Dann existieren $x_1, x_2 \in D$ so, dass $(\forall x \in D)(f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2))$, d.h.: f ist beschränkt und $f(D)$ besitzt Minimum und Maximum.

Bemerkung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei streng mon. $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$ $\implies$ f injektiv und $f^{-1} : f(I) \to I$.

f streng mon. $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$ $\Leftrightarrow$ f^{-1} streng mon. $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$

Satz 18.4

Voraussetzung: Sei I ein Intervall, $f \in \mathrm{C}(I)$

$f(I)$ ist Intervall

Hilfssatz

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a;b])$, $A := \min f([a;b])$, $B := \max f([a;b])$

Dann ist $f([a;b]) = [A;B]$.

Satz 18.5

Voraussetzung: I Intervall,$f \in \mathrm{C}(I)$ streng monoton

$f^{-1} \in \mathrm{C}(f(I))$

Definition 18.3 Logarithmus

Auf $\log : (0;\infty) \to \mathbb{R}$ wird der Logarithmus $\log x$ folgendermaßen definiert: $\log x := E^{-1}(x)$.

Bemerkung Eigenschaften von $\log$

(1) log ist auf $(0;\infty)$ streng monoton wachsend und stetig.

(2) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$.

(3) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

(4) $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$

Definition 18.4 Allgemeine Potenz

Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$. Speziell für $a = e$:

$$e^x := E(x \log e) = E(x)$$

Dann ist

$$a^x := E(x \log a) = e^{x \log a}$$

Bemerkung Eigenschaften der allgemeinen Potenz

(1) $x \mapsto a^x$ stetig

(2) $a^x > 0$

(3) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

19 Funktionenfolgen und -reihen

Konvention für Kapitel 19

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen.

$f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ bezeichnet die Funktionenfolge (s_n).

Definition 19.1 Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge (f_n), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt punktweise/pw konvergent :⇔

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) / \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ex. für alle } x \in D$$

Dann heißt $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ bzw. $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ die Grenz- bzw. Summenfunktion von $(f_n)/\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Bemerkung

Punktweise Konvergenz in Quantorenschreibweise:

$$(\forall x \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(x,\varepsilon))(\forall n \geq n_0)^{(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)}_{(|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon)}$$

Definition 19.2 Gleichmäßige Konvergenz

(f_n) bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig/glm konvergent $:\Leftrightarrow$ Es ex. ein $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $s : D \to \mathbb{R}$ mit:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))(\forall n \geq n_0)(\forall x \in D)^{(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)}_{(|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon)}$$

Bemerkung

(f_n) konv. glm gegen $f \implies (f_n)$ konv. pw gegen f. (analog für (s_n))

Satz 19.1

Voraussetzung: (f_n) Funktionenfolge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Fkt.
Genau dann, wenn eine Nullfolge (α_n) und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq n_0)(\forall x \in D)(|f_n(x) - f(x)| < \alpha_n)$$

existieren, konvergiert (f_n) glm gegen f.

Satz 19.2 Majorantenkriterium von Weierstraß

Voraussetzung: (f_n) Funktionenfolge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Fkt.
Existiert eine Folge (c_n) und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq n_0)(\forall x \in D)(|f_n(x)| \leq c_n)$$

und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ glm auf D.

Bemerkung

Potenzreihen konvergieren im allgemeinen nicht glm auf ihrem Konvergenzbereich, jedoch konvergieren sie gleichmäßig auf einem abgeschlossenen Intervall, das Teilmenge ihres Konvergenzbereiches ist:

Satz 19.3

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe, D ihr Konvergenzbereich, $[a;b] \subseteq D$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert glm auf $[a;b]$.

Satz 19.4

Voraussetzung: $(f_n)/\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ glm gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergente Funktionenfolge

Dann gilt:

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n \text{ ist stetig in } x_0) \implies f \text{ ist stetig in } x_0$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n \in \mathrm{C}(D)) \implies f \in \mathrm{C}(D)$

Bemerkung

Ist (f_n) pw konvergent auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so gilt:

$f_n \in \mathrm{C}(D)$, aber $f \notin \mathrm{C}(D) \implies (f_n)$ konvergiert nicht glm.

Bemerkung

Ist $(f_n)/\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine glm gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergente Funktionenfolge, sind alle (f_n) in $x_0 \in D$ stetig und ist x_0 HP von D, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

Satz 19.5 Identitätssatz

Voraussetzung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ PRen mit KRen $r_1, r_2 > 0$

Sei $R := \min\{r_1, r_2\}$. Sei (x_k) eine Folge in $(-R, R) \setminus \{0\}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$.

Dann gilt $(\forall k \in \mathbb{N})(f(x_k) = g(x_k)) \implies (\forall n \in \mathbb{N}_0)(a_n = b_n)$

20 Gleichmäßige Stetigkeit

Konvention für Kapitel 20

$D \subseteq \mathbb{R} \qquad f : D \to \mathbb{R}$

Bemerkung

Es ist $f \in \mathrm{C}(D) \Leftrightarrow$

$$(\forall x' \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, x'))(\forall x \in D)(|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Definition 20.1 Gleichmäßige Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig/glm stetig $:\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x, x' \in D)(|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Bemerkung

f ist glm stetig auf $D \implies f \in \mathrm{C}(D)$

Satz 20.1

Voraussetzung: D beschränkt und abgeschlossen, $f \in \mathrm{C}(D)$

f ist glm stetig

Definition 20.2 Lipschitz-Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig $:\Leftrightarrow$

$$(\exists L > 0)(\forall x, x' \in D)(|f(x) - f(x')| < L(x - y))$$

Bemerkung

f ist Lipschitz-stetig auf $D \implies f$ ist glm stetig auf D

21 Differenzierbarkeit

Konvention für Kapitel 21

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Definition 21.1 Differenzierbarkeit

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt in x_0 differenzierbar/db $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Definition 21.2 Ableitung

Ist f db, so heißt $f'(x) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die (erste) Ableitung von f in x_0.

Bemerkung

Ist f in jedem $x \in I$ db, so heißt f db auf I. In diesem Fall wird durch $f' : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert. Diese Funktion heißt die (erste) Ableitung von f.

Satz 21.1

Voraussetzung: $f : I \to \mathbb{R}$ db in $x_0 \in I$

Dann ist f stetig in x_0.

Beispiel

Seien $c, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(c)' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (e^x)' = e^x$$

Satz 21.2

Voraussetzung: $f, g : I \to \mathbb{R}$, beide db in $x_0 \in I$

Sei $f := f(x_0) \quad g := g(x_0),\ f' := f'(x_0) \quad g' := g'(x_0)$. Dann gelten:

(1) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})((\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g')$

(2) $(f \cdot g)' = fg' + f'g$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Satz 21.3 Kettenregel

Voraussetzung: I, J Intervalle, $g : I \to \mathbb{R}$ sei db in $x_0 \in I$, $g(I) \subseteq J$, $f : J \to \mathbb{R}$ sei db in $y_0 := g(x_0)$

Dann gilt

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel

Seien $a, x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a^x)' = \log a \cdot a^x$$

Satz 21.4

Voraussetzung: I Intervall, $f \in \mathrm{C}(I)$ streng monoton, in x_0 db, $f'(x_0) \neq 0$

Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ db in $y_0 := f(x_0)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel

Seien $x, \alpha \in \mathbb{R}, y > 0$. Dann gilt

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Definition 21.3 Innerer Punkt

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in M$ heißt innerer Punkt von M $:\Leftrightarrow$

$$(\exists \delta > 0)(U_\delta(x_0) \subseteq M)$$

Bemerkung

Man beobachtet

(1) $M \subseteq \mathbb{R}$ ist offen $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(x$ ist innerer Punkt$)$

(2) $\mathbb{Q}$ hat keine inneren Punkte.

Definition 21.4 Relatives Extremum

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein relatives $\substack{\text{Minimum} \\ \text{Maximum}}$ $:\Leftrightarrow$

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \cap U_\delta(x_0))(\substack{f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0)})$$

Relatives Extremum := relatives Maximum oder Minimum.

Satz 21.5

Voraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 db, x_0 rel. Extremum von f, x_0 innerer Punkt von I

Dann gilt notwendigerweise $f'(x) = 0$.

Satz 21.6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a, b])$ db auf $[a, b]$

Dann gilt

$$(\exists \xi \in (a; b))(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a})$$

Hilfssatz Satz von Rolle

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a, b])$ db auf $[a, b]$,$f(a) = f(b)$

Dann gilt

$$(\exists z \in [a, b])(f'(z) = 0)$$

Satz 21.7

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a, b])$ db auf $[a, b]$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Folgende Monotonieeigenschaften kann man an der Ableitung ablesen:

(1) $(\forall x \in I)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ ist konstant auf I

(2) $(\forall x \in I)(f'(x) > 0) \implies f$ ist streng monoton wachsend auf I

(3) $(\forall x \in I)(f'(x) < 0) \implies f$ ist streng monoton fallend auf I

(4) $(\forall x \in I)(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I

(5) $(\forall x \in I)(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I

(6) $(\forall x \in I)(f'(x) = g'(x)) \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R})(f = g + c)$

Satz 21.8 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Voraussetzung: $f, g \in \mathrm{C}([a, b])$ db auf $(a; b)$ und $(\forall x \in (a; b))(g'(x) \neq 0)$

Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gilt

$$(\exists z \in (a; b))\left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}\right)$$

22 Die Regel von de L'Hospital

Satz 22.1

Voraussetzung: $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ diffbar auf $(a; b)$ ($a, b = \pm\infty$ zugelassen), $g'(x) \neq 0$

Ist (I) $\lim\limits_{x \to {a \atop b}} f(x) = \lim\limits_{x \to {a \atop b}} g(x) = 0$ oder (II) $\lim\limits_{x \to {a \atop b}} g(x) = \pm\infty$ und existiert

$$L := \lim_{x \to {a \atop b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(dabei ist $L = \pm\infty$ zugelassen), so gilt:

$$\lim_{x \to {a \atop b}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

23 Ableitungen von Potenzreihen, Sinus, Cosinus

Satz 23.1 Ableiten einer Potenzreihe

Es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Die beiden PR haben den gleichen KR. (Wichtig: $(a_0 x^0)' = 0$!)

Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Satz 23.2 Satz des Pythagoras

Voraussetzung: $x \in \mathbb{R}$

Es gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Daher auch insbesondere $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$

Satz 23.3

Voraussetzung: $x \in \mathbb{R}$

Dann ist $|\sin x| \leq |x|$.

Satz 23.4

Voraussetzung: $x \in (0; 2)$

Dann ist $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$.

Satz 23.5 Additionstheoreme

Voraussetzung: $x, y \in \mathbb{R}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Definition 23.1 Pi

Ein für allemal:

$$\pi := 2 \cdot \text{ die erste Nullstelle der cos-Funktion} = 3,14159...$$

Satz 23.6

Voraussetzung: $x \in \mathbb{R}$

(1) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(2) $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$

(3) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

(4) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$

(5) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Satz 23.7

$\cos x$ hat in $[0; \pi]$ genau eine Nullstelle, nämlich $\frac{\pi}{2}$.

Satz 23.8

Voraussetzung: $x \in \mathbb{R}$

Dann gelten

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

24 Potenzreihen II

Definition 24.1 Allgemeine Potenzreihe

Eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ heißt Potenzreihe/PR mit Entwicklungspunkt x_0.

und -bereich von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stimmen bis auf Verschiebung um x_0 in positiver Richtung überein.

Bemerkung

Alle bisherigen Sätze über Potenzreihen lassen sich auf die allg. PR übertragen.

Definition 24.2 Darstellung durch PR

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_1 \in I$.

f wird in einer Umgebung von x_1 durch eine PR dargestellt $:\Leftrightarrow$

$$(\exists \delta > 0)(\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_1)^n \text{ mit KR } r > \delta\ )$$
$$(\forall x \in I \cap U_\delta(x_1))(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_1)^n)$$

Hilfssatz

Voraussetzung: $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ Potenzreihe mit KR $r > 0$, $I = (x_0 - r; x_0 + r)$, $x_1 \in I$

Dann sei $\delta := r - |x_1 - x_0|$ und $J := (x_1 - \delta; x_1 + \delta)$. Dann gilt: Es ex. eine PR $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_1)^n$ mit KR $r' > \delta$ und

$$(\forall x \in J)(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_1)^n)$$

25 Höhere Ableitungen

Definition 25.1 Zweite, n-te Ableitung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ db auf I. f heißt in $x_0 \in I$ zweimal db :$\Leftrightarrow$ f' db in x_0. In diesem Fall heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die zweite Ableitung von $f(x_0)$. Die Definition lässt sich analog auf Intervalle und höhere Ableitungen übertragen:

$$f = f^{(0)}, \dots, f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}$$

Definition 25.2 Stetige Differenzierbarkeit

f heißt stetig db :$\Leftrightarrow$ f' existiert und ist stetig.

Bezeichnung: $f \in \mathrm{C}^n(I)$. Dabei ist $\mathrm{C}^0(I) = \mathrm{C}(I), \mathrm{C}^\infty(I) := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{C}^n(I)$.

Bemerkung f differenzierbar $\not\Longrightarrow$ $f \in \mathrm{C}^1$

Betrachte hierzu z.B.

$$f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Bemerkung

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, x_0 innerer Pkt. von I. Weiterhin: f lasse sich in einer Umgebung von x_0 als PR darstellen:

$$(\exists \delta > 0)(\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ mit KR } r \geq \delta\ )$$

$$(U_\delta(x_0) \subseteq I \wedge (\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n))$$

Dann gilt:

(1) $f \in \mathrm{C}^\infty(U_\delta(x_0))$

(2) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Definition 25.3 Taylorreihe

Sei $\varepsilon > 0, f \in \mathrm{C}^\infty(U_\varepsilon(x_0))$. Dann heißt die PR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die zu f gehörige Taylorreihe.

Bemerkung

Im Allgemeinen ist die Taylorreihe keine Darstellung für die Funktion f. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Satz 25.1 Satz von Taylor

Voraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0, f \in \mathrm{C}^n(I), f^{(n+1)}$ ex. auf I

Seien $a, b \in I, a \neq b$. Dann existiert $\xi \in (\min\{a,b\}, \max\{a,b\})$ mit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Bemerkung

Für $n = 0$ ist der Satz von Taylor äquivalent zum Mittelwertsatz. Das vom Satz von Taylor versprochene ξ ist von a, b und n abhängig.

Bemerkung

Mit dem Satz von Taylor läßt sich u.a. zeigen, daß $e \notin \mathbb{Q}$ oder $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

Definition 25.4 Taylorpolynom

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in \mathrm{C}^n(I), n \in \mathbb{N}_0, x_0 \in I$. Dann heißt

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f in x_0.

Bemerkung Eigenschaften des Taylorpolynoms

Man beobachtet

(1) $T_n(x; x_0)$ ist Polynom vom Grad n.

(2) $T_n^{(k)}(x_0; x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

(3) Die beiden obigen Eigenschaften bestimmen das Taylorpolynom eindeutig.

Bemerkung Andere Formulierung des Satzes von Taylor

Es existiere $f^{(n+1)}$ auf I. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists \xi(x, n) \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}))$$
$$(f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1})$$

Hilfssatz

Ist $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) f läßt sich in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ als Potenzreihe darstellen.

(2) $(\forall x \in U_\delta(x_0))(\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x; x_0) = f(x))$

(3) $(\forall x \in U_\delta(x_0))(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x - x_0)^{n+1} = 0)$

Satz 25.2

Voraussetzung: $I = (a; b)$ mit $a, b = \pm\infty$ zugelassen, $f \in \mathrm{C}^\infty(I), x_0 \in I$

Existiert ein $c > 0$ mit

$$(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq c^n)$$

so gilt

$$(\forall x \in (x_0 - \frac{1}{c}; x_0 - \frac{1}{c}))(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n)$$

26 Extremwerte

Satz 26.1

Voraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $n \geq 2$, $f \in \mathrm{C}^n(I)$, x_0 innerer Punkt von I

Gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so läßt sich über f folgendes aussagen:

(1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lok. Extremum.

(2) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) \substack{<0 \\ >0}$, so hat f in x_0 ein lokales $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$

27 Das Riemann-Integral

Konvention für Kapitel 27

In diesem Kapitel sei stets $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Setze überdies $m := \inf f([a,b])$, $M := \sup f([a,b])$.

Definition 27.1 Zerlegung

Eine Menge $z = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ heißt Zerlegung von $[a,b]$ $:\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, n \geq 1$.

Konvention für Kapitel 27

Sei z eine Zerlegung von $[a,b]$ Dann sei für $j = 1 \dots n$

$$\begin{aligned} I_j &:= [x_{j-1}, x_j], |I_j| = x_j - x_{j-1} \\ m_j &:= \inf I_j, M_j := \sup I_j \\ \underline{s_f}(z) &:= \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \\ \overline{s_f}(z) &:= \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \end{aligned}$$

Dabei heißen heißt $\underline{s_f}(z)$ Untersumme und $\overline{s_f}(z)$ Obersumme für f und z.

Bemerkung Verschiedene Abschätzungen

Es gilt

$$\begin{aligned} &m \leq m_j \leq M_j \leq M, m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j| \\ &\sum_{j=1}^{n} |I_j| = b - a \\ &m(b-a) \leq \underline{s_f}(z) \leq \overline{s_f}(z) \leq M(b-a) \end{aligned}$$

für alle Zerlegungen z von $[a,b]$.

Satz 27.1

Voraussetzung: z_1, z_2 Zerlegungen von $[a,b]$

(1) $z_1 \subseteq z_2 \implies \underline{s_f}(z_1) \leq \underline{s_f}(z_2)$ und $\overline{s_f}(z_2) \leq \overline{s_f}(z_1)$

(2) $\underline{s_f}(z_1) \leq \overline{s_f}(z_2)$

Definition 27.2 Oberes/unteres Integral

Für eine Funktion f mit den obigen Eigenschaften definiert man:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{s_f}(z) \mid \; z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{s_f}(z) \mid \; z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

Bemerkung Eine Abschätzung

Es gilt

$$m|b-a| \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

Definition 27.3 Riemann-Integral

f heißt Riemann-integrierbar (ib) über $[a,b]$ $:\Leftrightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Dieser Ausdruck heißt dann das Riemann-Integral von f über $[a,b]$. Die Menge $\mathrm{R}([a,b])$ ist dann die Menge aller auf dem Intervall $[a,b]$ ib'en Funktionen.

Satz 27.2

Voraussetzung: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien beschr.

Dann gelten

(1) $f \leq g$ auf $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx$ und $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$.

(2) Sei $\alpha \geq 0$. Dann gilt: $\underline{\int_a^b} \alpha f(x)dx = \alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx$ und $\overline{\int_a^b} \alpha f(x)dx = \alpha \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

(3) $\underline{\int_a^b} -f(x)dx = -\overline{\int_a^b} f(x)dx$ und $\overline{\int_a^b} -f(x)dx = -\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

(4) $\underline{\int\limits_a^b} f(x) + g(x)dx \geq \underline{\int\limits_a^b} f(x)dx + \underline{\int\limits_a^b} g(x)dx$ $\overline{\int\limits_a^b} f(x) + g(x)dx \leq \overline{\int\limits_a^b} f(x)dx + \overline{\int\limits_a^b} g(x)dx$.

(5) $\mathrm{R}([a,b])$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \to \int\limits_a^b f(x)dx$ ist linear.

Satz 27.3 Riemann'sches Integrabilitätskriterium

Es gilt

$$f \in \mathrm{R}([a,b]) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists z(a,b) \text{ Zerlegung})(\overline{s_f}(z) - \underline{s_f}(z) < \varepsilon)$$

Satz 27.4

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton

Dann ist $f \in \mathrm{R}([a,b])$

Definition 27.4 Stammfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $G, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann heißt G Stammfunktion/SF von g auf $I :\Leftrightarrow G$ ist auf I db und $G' = g$.

Bemerkung

Sind G, H Stammfunktionen von g auf $I \neq \emptyset$, so folgt $(\exists c \in \mathbb{R})(G = H + c)$

Satz 27.5 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Voraussetzung: Sei $f \in \mathrm{R}([a,b])$ und $F \in \mathrm{C}([a,b])$ eine SF von f auf (a,b)

Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F]_a^b$$

Bemerkung

Man beobachtet

- Es gibt Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht integrierbar sind.

- Eine integrierbare Funktion muß keine Stammfunktion besitzen.

Satz 27.6

Voraussetzung: f_n Funktionenfolge in $\mathrm{R}([a,b])$, $f_n / \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ glm konv. auf $[a,b]$ gegen $f/s : [a,b] \to \mathbb{R}$

Dann ist $f, s \in \mathrm{R}([a,b])$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$$

28 Mehr zu Integralen

Satz 28.1

Voraussetzung: $f \in \mathrm{R}([a,b]), D := f([a,b])$ und $h : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig

Dann ist $h \circ f \in \mathrm{R}([a,b])$.

Bemerkung

Folgerung: $f \in \mathrm{R}([a,b]) \implies f^2 = f \cdot f \in \mathrm{R}([a,b])$

Satz 28.2

Voraussetzung: $f, g \in \mathrm{R}([a,b])$

Dann gilt auch

(1) $|f| \in \mathrm{R}([a,b])$ und $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(2) $f \cdot g \in \mathrm{R}([a,b])$

(3) $(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a,b])(g(x) \geq \delta) \implies \frac{f}{g} \in \mathrm{R}([a,b])$

29 Stetige Funktionen und Mittelwertsätze

Satz 29.1

$C([a,b]) \subset R([a,b])$

Satz 29.2

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $c \in (a;b)$

Dann ist

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a;c]) \cap R([c;b])$$

und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Satz 29.3

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $M := \{x \in [a,b] | \ f \text{ ist unstetig in } x\}$

Ist M endlich, so ist $f \in R([a,b])$.

Satz 29.4

Voraussetzung: $f \in R([a,b])$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

(1) Ist $M := \{x \in [a,b] | f(x) \neq g(x)\}$ endlich, so gilt $g \in R([a,b])$ und $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(2) $f = g$ auf $(a;b) \implies g \in R([a,b])$ und $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Satz 29.5 Erster und erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Voraussetzung: $f, g \in R[a,b], g \geq 0$ auf $[a,b]$, $m := \inf f([a,b])$, $M := \sup f([a,b])$

(1) $(\exists \mu \in [m,M])(\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a))$ Außerdem

$$f \in C([a,b]) \implies (\exists \xi \in [a,b])(\mu = f(\xi))$$

(2) $(\exists \mu \in [m,M])(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx)$ Außerdem

$$f \in \mathrm{C}([a,b]) \implies (\exists \xi \in [a,b])(\mu = f(\xi))$$

30 Der Riemann'sche Zugang zum Integral

Konvention für Kapitel 30

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $z := \{x_0, \dots, x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$ m_j, M_j, I_j wie in Definition 27.1.

Definition 30.1 Zwischenvektor

Wähle in jedem Intervall I_j ein ξ_j $(j = (1,\dots,n))$ und setze $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. Dann heißt ξ ein zu z passender Zwischenvektor (ZV) und $\sigma_f(z,\xi) = \sum\limits_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|$ eine Riemann'sche Zwischensumme.

Bemerkung

Es gilt $m_j \leq \xi_j \leq M_j$ und deswegen $\underline{s_f}(z) \leq \sigma_f(z,\xi) \leq \overline{s_f}(z)$.

Hilfssatz

Es gilt

$f \in \mathrm{R}([a,b]) \Leftrightarrow (\exists s \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists$ Zerlegung von $[a,b])(\forall$ ZV $\xi)(|\sigma_f(z;\xi) - s| < \varepsilon)$

In diesem Fall $\int\limits_a^b f(x) = s$.

31 Der zweite Hauptsatz der Integralrechnung

Definition 31.1

Sei $f \in \mathrm{R}([a,b])$. Dann ist $\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$

Sei $c \in [a,b]$. Dann ist $\int\limits_c^c f(x)dx := 0$

Bemerkung

$f \in \mathrm{R}([a,b]), x \in [a,b]$. Dann ex. $\int\limits_a^x f(x)dx$.

Satz 31.1 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Voraussetzung: $f \in \mathrm{R}([a,b])$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)dt$

(1) F ist Lipschitz-stetig auf $[a,b]$, insbes. $F \in \mathrm{C}([a,b])$

(2) Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 db und $F'(x_0) = f(x_0)$

(3) $f \in \mathrm{C}([a,b]) \implies F \in \mathrm{C}^1([a,b])$ und $F' = f$ auf $[a,b]$

Bemerkung

Jede Funktion $f \in \mathrm{C}([a,b])$ besitzt auf $[a,b]$ eine Stammfunktion.

32 Integrationsregeln

Satz 32.1

Voraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ bel. Intervall, $f \in \mathrm{C}(I)$, $\xi \in I$ fest, $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)dt$

$F' = f$ auf I

Definition 32.1 Unbestimmtes Integral

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ bel. Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Besitzt f auf I eine Stammfunktion F, so schreibt man für eine solche auch

$$\int f(x)dx := F$$

Satz 32.2 Partielle Integration

(1) $f, g \in \mathrm{R}([a,b])$, F, G Stammfunktionen von f, g.
Dann: $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int\limits_a^b f(x)G(x)dx$

(2) $f, g \in \mathrm{C}^1([a,b])$
Dann: $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$

(3) $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall, $f, g \in \mathrm{C}^1(I)$
Dann: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Definition 32.2 Hilfsschreibweise zur Substitutionsregel

Für den folgenden Satz legen wir fest

$$< \alpha; \beta >:= [\min\{\alpha, \beta\}; \max\{\alpha, \beta\}]$$

Satz 32.3 Substitutionsregel

Voraussetzung: $f \in \mathrm{R}(< \alpha; \beta >)$ besitze auf $< \alpha; \beta >$ eine Stammfunktion.

(1) $g :< \alpha; \beta > \to \mathbb{R}$ db, $(f \circ g) \cdot g' \in \mathrm{R}((\alpha; \beta))$
$g(< \alpha; \beta >) \subseteq < \alpha; \beta >, a := g(\alpha), b := g(\beta)$
Dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

(2) $f \in \mathrm{C}(< a; b >), g \in \mathrm{C}^1(< \alpha; \beta >)$
$g(< \alpha; \beta >) \subseteq < \alpha; \beta >, a := g(\alpha), b := g(\beta)$
Dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

(3) I, J seien bel. Intervalle, $f \in \mathrm{C}(I), g \in \mathrm{C}^1(J) \subseteq I$

(4) $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=g(t)}$ auf J.

(5) g streng monoton $\implies$ $(\exists g^{-1} : g(J) \to J)$
$\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$

Bemerkung Merkregel für die Substitution

Sei $g = g(x)$ eine db Funktion. Dann schreibt man $\frac{dg}{dx}$ für g'. Subst. $x = g(t)$. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)dt$. Keine Mathematik, aber schick zum Merken.

33 Verschiedenes

Definition 33.1 Feinheitsmaß

Sei z eine Zerlegung von $[a,b]$ und $|I_j|, j = 1 \ldots n$ die Länge des j-ten Intervalls. Dann ist $|z| := \max\{|I_j| | j = 1 \ldots n\}$ das Feinheitsmaß von z.

Satz 33.1

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (\forall x \in [a,b])(|f(x)| \le M)$, $z, \tilde{z}$ Zerlegungen von $[a,b]$, $z \subseteq \tilde{z}$, $\tilde{z}$ enthält p Teilpunkte mehr als z.

Dann gelten

$$\underline{s_f}(\tilde{z}) \le \underline{s_f}(z) + 2pM|z|$$

$$\overline{s_f}(\tilde{z}) \ge \overline{s_f}(z) - 2pM|z|$$

Satz 33.2

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (\forall x \in [a,b])(|f(x)| \le M)$, (z_n) Folge von Zerlegungen von $[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$, zu jedem z_n existiert ein passender Zwischenvektor $\xi(n)$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{s_f}(z_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{s_f}(z_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

(2) $f \in \mathrm{R}([a,b]) \implies \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_f(z_n;\xi(n)) = \int_a^b f(x)dx$

Satz 33.3

Voraussetzung: (f_n) Folge in $C^1([a,b])$. $f_n(a)$ konvergiert, f_n' konvergiert glm auf $[a,b]$ gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f_n konvergiert glm auf $[a,b]$ und für die Grenzfunktion gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad f \in \mathrm{C}^1[a,b]$$

$$(\forall x \in [a,b])(f'(x) = g(x))$$

Bemerkung

Vorstehender Satz läßt sich ausdrücken (mit den obigen Voraussetzungen):

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = f' = g = \lim_{n\to\infty} (f_n)'$$

Obiger Satz gilt entsprechend für Funktionenreihen.

Satz 33.4 Satz von Taylor mit Integralrestglied

Voraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in \mathrm{C}^{n+1}(I)$, $a, b \in I, a < b$

Es gilt

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int\limits_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

34 Uneigentliche Integrale

Konvention für Kapitel 34

$a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Definition 34.1 Uneigentliches Integral

$f : \begin{smallmatrix}[\alpha;\beta)\\(\alpha;\beta]\end{smallmatrix} \rightarrow \mathbb{R}$ sei ib über jedem Intervall $\begin{smallmatrix}[a;t]\\[t;b]\end{smallmatrix}$ mit $t \in \begin{smallmatrix}(a;\beta)\\(\alpha;b)\end{smallmatrix}$. Existiert der Grenzwert $\begin{matrix}\lim\limits_{t\rightarrow\beta} \int_a^t f(x)dx\\ \lim\limits_{t\rightarrow\alpha} \int_t^b f(x)dx\end{matrix}$, so heißt f uneigentlich integrierbar über $\begin{smallmatrix}[a;\beta)\\(\alpha;b]\end{smallmatrix}$. und das Integral $\begin{matrix}\int_a^\beta f(x)dx\\ \int_\alpha^b f(x)dx\end{matrix} = \begin{matrix}\lim\limits_{t\rightarrow\beta} \int_a^t f(x)dx\\ \lim\limits_{t\rightarrow\alpha} \int_t^b f(x)dx\end{matrix}$ heißt konvergent. Andernfalls heißt $\begin{matrix}\int_a^\beta f(x)dx\\ \int_\alpha^b f(x)dx\end{matrix}$ divergent.

Hilfssatz

Voraussetzung: $f : [\alpha;\beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ib für alle $[a;t)$ mit $t \in (\alpha;\beta)$

Es ist

$$\int\limits_a^\beta f(x)dx \text{ konvergent} \Leftrightarrow (\exists c \in (\alpha;\beta))(\int\limits_c^\beta f(x)dx \text{ konvergent})$$

In diesem Fall:

$$\int\limits_a^\beta f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\beta f(x)dx$$

Für untere Grenzen gilt dieser Satz analog.

Definition 34.2 Beidseitiges uneigentliches Integral

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich ib über $(\alpha; \beta)$:⇔

$$(\exists c \in (\alpha; \beta))(\int_\alpha^c f(x)dx \text{ konvergent} \wedge \int_c^\beta f(x)dx \text{ konvergent})$$

In diesem Fall:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

Bemerkung

Gilt obige Beziehung für ein $c \in (\alpha; \beta)$, so gilt sie für alle $c \in (\alpha; \beta)$.

Bemerkung

Aus der Existenz von $\lim\limits_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$ folgt nicht die Konvergenz des entsprechenden Integrals.

Konvention für Kapitel 34

Die folgenden Sätze und Definitionen sind für Integrale der Form $\int_a^\beta f(x)dx$ formuliert, gelten aber sinngemäß auch für den anderen Typ.
Sei ab hier $f \in \mathrm{R}([a, b])$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Satz 34.1 Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale

Es gilt

$$\int_a^\beta f(x)dx \text{ konvergent} \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta))(\forall u, v \in [c, \beta))(\left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon)$$

Definition 34.3 Absolute Konvergenz bei uneigentlichen Integralen

$\int_a^\beta f(x)dx$ heißt absolut konvergent :⇔ $\int_a^\beta |f(x)|dx$ konvergiert.

Satz 34.2 Dreiecksungleichung für uneigentliche Integrale

Voraussetzung: $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ absolut konvergent

$\int\limits_a^\beta f(x)dx$ konvergent und es gilt

$$\left|\int\limits_a^\beta f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^\beta |f(x)|dx$$

Satz 34.3 Majoranten-/Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale

(1) $(\forall x \in [a,\beta))(|f(x)| \leq g(x))$, $\int\limits_a^\beta g(x)dx$ konv. $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ konv. absolut (*Majorantenkriterium*)

(2) $(\forall x \in [a,\beta))(f(x) \geq g(x) \geq 0)$, $\int\limits_a^\beta g(x)dx$ divergent $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ divergent (*Minorantenkriterium*)

Bemerkung

Sei W die Menge aller über $[a,\beta)$ uneigentlich ib'en Funktionen. Dann ist W ein reeller Vektorraum und die Abbildung $f \mapsto \int\limits_a^\beta f(x)dx \, (f \in W)$ ist linear.

35 Funktionen von beschränkter Variation

Definition 35.1 Variation

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funtkion. $z = \{x_0, ...x_n\}$ sei Zerlegung von $[a,b]$.

Dann heißt $V_f(z) := \sum\limits_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ die Variation von f bezgl. z.

Hilfssatz

Voraussetzung: z_1, z_2 Zerlegungen von $[a,b]$ mit $z_1 \subseteq z_2$

$V_f(z_1) \leq V_f(z_2)$

Definition 35.2 Beschränkte Variation

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation (bV) :⇔

$$(\exists M \geq 0)(\forall z \text{ Zerlegung von } [a, b])(V_f(z) \leq M)$$

In diesem Fall heißt $V_f([a, b]) := \sup\{V_f(z) \mid z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$ die Totalvariation von f. $\mathrm{BV}([a, b])$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$

Hilfssatz

Es ist $\mathrm{C}^1([a, b]) \subset \mathrm{BV}([a, b])$, aber $\mathrm{C}([a, b]) \not\subset \mathrm{BV}([a, b])$.

Satz 35.1

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$

(1) $f \in \mathrm{BV}([a, b]) \Leftrightarrow f \in \mathrm{BV}([a; c]) \cap \mathrm{BV}([c; b])$ $(\forall f \in \mathrm{BV}([a, b]))(V_f([a, b]) = V_f([a; c]) + V_f([c; b])$

(2) $f \in \mathrm{BV}([a, b]) \implies f$ ist beschränkt

(3) f monton auf $[a, b] \implies f \in \mathrm{BV}([a, b])$

(4) f hat beschränkte Ableitung $\implies f \in \mathrm{BV}([a, b])$ Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn $f \in \mathrm{C}^1([a, b])$ oder f Lipschitz-stetig.

(5) $\mathrm{BV}([a, b])$ ist ein reeller Vektorraum.

Satz 35.2

Es ist $f \in \mathrm{BV}([a, b]) \Leftrightarrow$

$$(\exists f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ monton } \nearrow)(f = f_1 - f_2)$$

Satz 35.3

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}^1([a, b])$

Dann gilt

$$V_f([a, b]) = \int_a^b |f'(x)| dx$$

36 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Konvention für Kapitel 36

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Definition 36.1 Riemann-Stieltjes-Integral

Sei $z = \{x_0, ...x_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$ und ξ ein zu z passender ZV.

$\sigma_f(z; \xi; g) := \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$ heißt dann Riemann-Stieltjes-Summe.

f heißt (Riemann-Stieltjes-)ib bzgl. g :⇔

$$(\exists s \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \text{ Zerlegung von } [a, b] \text{ mit } |z| < \delta)$$
$$(\forall \xi \text{ ZV passend zu } z)(|\sigma_f(z; \xi; g) - s| < \varepsilon)$$

$\mathrm{R}_g([a, b])$ bezeichnet die Menge aller über $[a, b]$ bzgl. g Riemann-Stieltjes-ib'en Funktionen.

Man kann zeigen, daß s in diesem Fall eindeutig bestimmt ist. s heißt dann das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. g über $[a, b]$

Schreibweise:

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) := s$$

Bemerkung

Es gilt

(1) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}, g(x) := x$. Dann ist $\sigma_f(z, \xi, g) = \sigma_f(z, \xi)$ und es gilt $\mathrm{R}_g([a, b]) = \mathrm{R}([a, b])$.

(2) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}, g(x) := c, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\mathrm{R}_g([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Satz 36.1

Es gilt

$$f \in \mathrm{R}_g([a, b]) \Leftrightarrow (\forall (z_n)\ z_n \text{ Zerl. von } [a, b] \text{ mit } |z_n| \to 0 (n \to \infty))$$
$$(\forall (\xi_n)\ \xi_n \text{ zu } z_n \text{ passender ZV})(\sigma_f(z_n, \xi_n, g) \to \int\limits_a^b f(x)dg(x))$$

Satz 36.2

Voraussetzung: $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

(1) $\mathrm{R}_g([a,b])$ ist reeller Vektorraum. Die Abbildung $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dg(x)\,(f \in \mathrm{R}_g([a,b]))$ ist linear.

(2) $f \in \mathrm{R}_{g_1}([a,b]) \cap \mathrm{R}_{g_2}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann: $f \in \mathrm{R}_{\alpha g_1 + \beta g_2}$ und

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha g_1(x) + \int\limits_a^b f(x)d\beta g_2(x) = \int\limits_a^b f(x)d\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

(3) $a < c < b; f \in \mathrm{R}_g([a;c]) \cap \mathrm{R}_g([c;b]) \cap \mathrm{R}_g([a,b])$ Dann: $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x)$

Bemerkung

$f \in \mathrm{R}_g([a;c]) \cap \mathrm{R}_g([c;b]) \not\Longrightarrow f \in \mathrm{R}_g([a,b])$

Satz 36.3 Partielle Integration (Riemann-Stieltjes)

Voraussetzung: $f \in \mathrm{R}_g([a,b])$

$g \in \mathrm{R}_f([a,b])$ und es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b g(x)df(x)$$

Satz 36.4

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b]), g \in \mathrm{BV}([a,b])$

Dann ist $f \in \mathrm{R}_g([a,b])$.

Satz 36.5

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b]), g \in \mathrm{C}^1([a,b])$

$f \in \mathrm{R}_g([a,b])$ und es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$$

Satz 36.6

Voraussetzung: $g : [a,b] \to \mathbb{R} \nearrow,\ f_1, f_2 \in \mathrm{R}_g([a,b]), f_1 \leq f_2$

Dann gilt

$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

Bemerkung

$f \in \mathrm{R}_g([a,b]),\ g \nearrow,\ m, M \in \mathbb{R}, m \leq f \leq M$ auf $[a,b]$. Dann gilt

$$m[g(x)]_a^b \leq \int_a^b f(x)dg(x) \leq M[g(x)]_a^b$$

Satz 36.7

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b]),\ g \in \mathrm{BV}([a,b]),\ F(x) := \int\limits_a^x f(t)dg(t)$

(1) $F \in \mathrm{BV}([a,b])$

(2) g in x_0 stetig $\implies$ F in x_0 stetig

Bemerkung

Sind $f \in \mathrm{C}([a,b]),\ g \in \mathrm{C}^1([a,b])$, so gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t) = \int_a^x f(t)g'(t)dt \implies F \in \mathrm{C}^1([a,b])$$
$$F'(x) = f(x)g'(x) \text{ auf } [a,b]$$

Das war's — weiter geht's in Ana II :-)

A Tricks for kicks

Trick Grenzwert einer rekursiv def. Folge

Monotonie/Beschränktheit beweisen, Grenzwert durch Einsetzen in Definition.

Trick Geht nicht?

Schätz' es ab. Geht immer noch nicht? Versuch's mit Bernoulli. Immer noch nicht? Schreib' den Anfang der Reihe hin. Immer noch nicht? Versuch' doch mal, den Mittelwertsatz als Abschätzung zu verwurschten. Auch nicht? Dann versuch' mal eine Formel aus Kapitel 4! Geht immer noch nicht? Substituier doch mal wieder!

Trick Polynom im Zähler, Polynom im Nenner?

Klammer' doch $x^z, z \in \mathbb{Z}$ aus.

Trick Steht da was von $|a+c|$?

Dann hilft Dir vielleicht $|a+c| = |a-b+b+c| \leq |a-b| + |b+c|$.

Trick Reihenwert berechnen

Versuch mal, zu integrieren, dann zu berechnen, und dann wieder zu differenzieren! (Vor. glm konv.)

Trick Integriert sich nicht von selbst?

Zwing es: Partielle Integration mit 1 als f'? Partielle Integration, bei der immer das gleiche rauskommt: nach Integral auflösen! So ähnlich wie $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$? Da steckt die Trigonometrie dahinter! Wo wir bei Trigonometrie sind: $\sin^2 = 1 - \cos^2$ und umgekehrt.

Rationale Funktion in Abhängigkeit von $\sin x$ und $\cos x$?

Substituiere $t = \tan \frac{x}{2}$. Dann wird aus:

$$\begin{array}{ccc} \sin x & \rightarrow & \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x & \rightarrow & \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin^2 \frac{x}{2} & \rightarrow & \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 \frac{x}{2} & \rightarrow & \frac{1}{1+t^2} \end{array}$$

Rationale Funktion in Abhängigkeit von $\sqrt{ax^2+bx+c}$ und x?

Substituiere $t = \frac{2(ax+b)}{\sqrt{\pm D}}$ mit $D = 4ac - b^2$. Dann bleibt irgendetwas von der Form $\sqrt{1+t^2}$,$\sqrt{1-t^2}$ stehen. Versuch es dann so:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{1+t^2} & \rightarrow & t = \sinh s \\ \sqrt{t^2-1} & \rightarrow & t = \cosh s \\ \sqrt{1-t^2} & \rightarrow & t = \sin / \cos s \end{array}$$

Rationale Funktion in Abhängigkeit von $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{cx+d}$ und x?

Substituiere $x = \frac{t^2-b}{a}$.

Trick Hilft alles nichts?

Schlaf drüber.

B Das Beste aus Übungen und Blättern

Satz B.1

Voraussetzung: $a, b, c \in \mathbb{R}$

(1) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

(2) $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$

(3) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$

Satz B.2

Voraussetzung: $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Satz B.3

Voraussetzung: $a, b, c > 0, n \in \mathbb{N}$

(1) $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

(2) $|\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}| \leq \sqrt[n]{|a-b|}$

(3) $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$

Satz B.4

Voraussetzung: $\emptyset \neq M$

(1) $\alpha \geq 0 : \sup \alpha M = \alpha \sup M$

(2) $\alpha < 0 : \sup \alpha M = \alpha \inf M$

Satz B.5

Voraussetzung: $(a_n), (b_n)$ beschränkte reelle Folgen

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k$

(2) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} a_k$

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

Satz B.6 Verdichtungssatz von Cauchy

Voraussetzung: (a_n) monoton fallende positive Folge

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergent}$$

Satz B.7 Konvergenzkriterium von Raabe

Voraussetzung: (a_n) reelle Folge mit $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \neq 0)$

$(\exists C > 1)\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{C}{n} \quad \text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}\right) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Satz B.8 Satz von Dini

Voraussetzung: (f_n) auf $[a;b]$ mon. wachsende Folge stetiger Funktionen

Konvergiert (f_n) pw gegen eine stetige Funktion, konvergiert (f_n) auch glm.

Satz B.9

Es gilt

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = \frac{\pi}{2} + k\pi)$$
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$$

Definition B.1 Trigonometrische Funktionen

Funktion	Definition	Ableitung
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x, \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{\cos x}{\sin x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\cot^{-1}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arcsinh} x$	$\sinh^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arccosh} x$	$\cosh^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\log \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert$		$\frac{1}{1-x^2}$

Satz B.10

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Satz B.11

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ PR mit KR $r > 0$, konv. für $x = r$

Die Reihe konv. auf $[0; r]$ glm und es gilt

$$\lim_{x \to r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Satz B.12 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Voraussetzung: $f, g \in \mathrm{R}([a;b]), (x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j dx\right|^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j^2$$

Definition B.2 Konvexität einer Funktion

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex $:\Leftrightarrow$

$$(\forall x, y \in I)(\exists \lambda \in [0;1])(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Satz B.13

Voraussetzung: $f : I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex

(1) f ist in jedem inneren Punkt von I stetig.

(2) f db $\implies$ (f konvex $\Leftrightarrow$ f monoton wachsend)

(3) f, g monoton wachsend $\implies$ $f \circ g$ ist konvex und monoton wachsend

Satz B.14 Partialbruchzerlegung

Voraussetzung: $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rationale Funktion, $p(x), q(x)$ Polynome, $\deg p < \deg q$

Habe q die Produktdarstellung

$$q(x) = a_n \prod_{k=1}^r (x - x_k)^{\varrho_k} \prod_{k=1}^s (x^2 + A_k x + B_k)^{\sigma_k}$$

Dann läßt sich $r(x)$ folgendermaßen als Summe darstellen:

$$r(x) = \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{\varrho_n} \frac{a_{nk}}{(x - x_n)^k} + \sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^{\sigma_n} \frac{\alpha_{nk} x + \beta_{nk}}{(x^2 + A_n x + B_n)^k}$$

Bemerkung

Die Koeffizienten der PBZ lassen sich im Wesentlichen mittels drei Verfahren bestimmen:

- Mit $(x-x_i)^{\varrho_k}$ multiplizieren, $x=x_i$ setzen
- Multiplikation mit q(x), Koeffizientenvergleich (umständlich)
- “Beliebige” Werte einsetzen, LGS lösen.

Satz B.15 Integration rationaler Funktionen

Voraussetzung: $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ rationale Funktion, $p(x), q(x)$ Polynome, $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$

Dann ist die rationale Funktion elementar integrierbar, weil sie sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in elementar ib Summanden aufteilen läßt. ($D := 4B - A^2 > 0$)

$$\int \frac{1}{x-x_i}dx = log|x-x_i|$$

$$\int \frac{1}{(x-x_i)^k}dx = \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-x_i)^{k-1}}$$

$$\int \frac{1}{x^2+Ax+B}dx = \frac{2}{\sqrt{D}}\arctan\frac{2x+A}{\sqrt{D}}$$

$$\int \frac{x}{x^2+Ax+B}dx = \frac{1}{2}\log|x^2+Ax+B| - \frac{A}{\sqrt{D}}\arctan\frac{2x+A}{\sqrt{D}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+Ax+B)^{k+1}}dx = \frac{1}{kD}\frac{2x+A}{(x^2+Ax+B)^k} + \frac{2(2k-1)}{kD}\int\frac{1}{x^2+Ax+B}dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+Ax+B)^{k+1}}dx = -\frac{1}{2k}\frac{1}{(x^2+Ax+B)^k} - \frac{A}{2}\int\frac{1}{x^2+Ax+B}dx$$

Satz B.16

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a;b])$, f^{-1} Umkehrfunktion von f

Es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}dx = bf(b) - af(a)$$

Satz B.17

Voraussetzung: $g, h \in \mathrm{BV}([a;b])$

Dann ist $\min/\max\{g,h\} \in \mathrm{BV}([a;b])$.

C GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

Copyright (C) 2000 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The ”Document”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “you”.

A “Modified Version” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “Secondary Section” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “Invariant Sections” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The “Cover Texts” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A “Transparent” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not “Transparent” is called “Opaque”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The “Title Page” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five). C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section entitled "History", and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. In any section entitled "Acknowledgements" or "Dedications", preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section as "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original

English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

Index

Sätze und Definitionen

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S