Analysis II

Ein Aufschrieb der Vorlesung *Analysis II* an der Uni Karlsruhe im Sommersemester 1999, gelesen von Priv.-Doz. Dr. G. Herzog.

GeTEXt von Andreas Klöckner (ak@ixion.net). Für Kommentare und Berichtigungen bin ich jederzeit dankbar. Neue Versionen gibt es unter http://www.ixion.net/ak/aufschrieb.

LaTeX-Lauf am 23. Februar 2006. "Nach der Klausur"-Edition, so wenige Fehler wie noch nie!

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte lineare Räume und Konvergenz

Konvention für Kapitel 1

Mit U, V, W, X, Y, Z bezeichnen wir in Zukunft Vektorräume. Falls diese endlich sind, so erscheint ihre Dimension im Index, wie z.B. in V_3.

Die Menge der Homomorphismen von V nach W bezeichnen wir dann mit $\mathcal{L}(V, W) := \mathrm{Hom}(V, W)$.

Definition 1.1 Norm

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(1) $(\forall x \in V)(\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o)$

(2) $(\forall x \in V)(\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität)

(3) $(\forall x, y \in V)(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$ (Dreiecksungleichung)

heißt eine Norm auf V. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so heißt $(V; \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum (NLR). Für $x, y \in V$ heißt $\|x - y\|$ der Abstand von x und y (bezüglich $\|\cdot\|$).

Beispiel Beispiele für Normen

Im Vektorraum $V_1 = \mathbb{R}$ existiert die Betragsfunktion als Norm mit $\|x\| := |x|$.

In $\mathbb{R}^n$ existieren folgende Normen (sei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$):

(1) $\|x\| := \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (Maximumsnorm)

(2) $\|x\| := \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|$ (Betragssummennorm)

(3) $\|x\| := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}$ (Euklid-Norm)

In $V = \mathrm{C}([a; b]; \mathbb{R})$ existieren folgende Normen:

(1) $\|x\| := \max\{\|f(t)\| \mid t \in [a; b]\}$

(2) $\|x\| := \int\limits_a^b |f(t)| dt$

Hilfssatz

(1) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

(2) $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$

Definition 1.2 Innenprodukt

Seien $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Dann heißt $x \cdot y := \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$ Innenprodukt/Skalarprodukt von x und y.

Bemerkung

Beachte

$$\sqrt{x \cdot x} = \text{Euklidnorm}$$

Satz 1.1 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die Euklidnorm ist eine Norm auf endlich dimensionalen VRen, und es gilt

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

Bemerkung

Ist $\|\cdot\|_0$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und V_n ein n-dimensionaler VR, so kann man V_n folgendermaßen normieren: Man wählt eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k b_k$. Dann ist $\|x\| := \|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|$ Norm auf V_n.

Ist umgekehrt $\|\cdot\|$ eine Norm auf V_n mit $\{b_1, \dots, b_n\}$ als Basis, so ist $\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|_0 := \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k b_k \right\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.3 Beschränktheit

Eine Menge A $\subseteq V$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow (\exists c > 0)(\forall x \in \text{A})(\|x\| < c)$.

Definition Konvergenz

Eine Folge (x_n) in V heißt konvergent, falls gilt

$$(\exists x \in V)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\|x_n - x\| < \varepsilon)$$

In diesem Fall heißt x Grenzwert/GW von (x_n). Sämtliche Schreibweisen von reellen Grenzwerten übertragen sich entsprechend.

Definition Cauchy-Folge

Eine Folge (x_n) in V heißt Cauchy-Folge, falls gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)(\|x_n - x_m\| < \varepsilon)$$

Bemerkung Analog wie in $\mathbb{R}$ definiert man

- Divergenz
- Beschränktheit
- Teilfolge

Bemerkung Analog wie in $\mathbb{R}$ beweist man

- Konvergente Folgen sind beschränkt
- Eindeutigkeit des Grenzwertes
- $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$
- $x_n \to x, y_n \to y \implies x_n + y_n \to x + y$
- $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x_n \to \lambda x$
- $\|x_n\| \to \|x\|$
- Jede Teilfolge einer konv. Folge konvergiert gegen den selben Grenzwert.

Bemerkung Konvergenz von Cauchyfolgen

Wie in $\mathbb{R}$ gilt auch in NLRen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, aber die Umkehrung gilt nur noch in speziellen Räumen:

Definition 1.4 Banach-Raum

Ein NLR $(V; \|\cdot\|)$ heißt vollständig oder Banach-Raum, wenn in V jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bemerkung

Die Definitionen 3 und 4 hängen von der gewählten Norm ab.

Definition 1.5 Äquivalenz von Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf V heißen äquivalent, wenn gilt

$$(\exists\alpha,\beta)(\forall x \in V)(\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1)$$

Schreibweise: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

Satz 1.2

“$\sim$” ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V.

Satz 1.3

Voraussetzung: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf VR V_n, $\dim V_n = n$

Dann ist $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

Satz 1.4

Voraussetzung: $(V_n; \|\cdot\|)$ NLR, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$

(1) Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V_n und $(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(k)} b_j$ eine Folge in V_n, so gilt: (x_n) konvergent $\Leftrightarrow$ die Folgen $(\xi_j^{(k)})$ sind konvergent $(j = 1 \ldots n)$. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sum_{j=1}^{n} \lim\limits_{k\to\infty} \xi_j^{(k)} b_j$.

(2) V_n ist vollständig.

Satz 1.5 Satz von Bolzano-Weierstraß

Voraussetzung: $(V_n, \|\cdot\|)$ endlich dimensionaler NLR, (x_k) beschränkte Folge in V_n

(x_k) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.6

Voraussetzung: $(V_n, \|\cdot\|_1)$ und $(W, \|\cdot\|_2)$ normierte NLRe, $\Phi \in \mathcal{L}(V_n, W)$

Die Menge

$$M := \left\{ \frac{\|\Phi(x)\|_2}{\|x\|_1} \mid x \in V_n \setminus \{0\} \right\}$$

ist beschränkt und $|||\cdot||| : \mathcal{L}(V_n, W) \to \mathbb{R}$ mit $|||\Phi||| := \sup M$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V_n, W)$. Für diese Norm gilt:

$$(\forall x \in V)(\|\Phi(x)\|_2 \leq |||\Phi||| \|x\|_1)$$

Bemerkung

Ist $\|\cdot\|_1$ Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$, so ist

$$|||A||| := \sup_{x \neq o} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$. Es gilt dann:

$$\|Ax\|_2 \leq |||A||| \cdot \|x\|_1$$

Ist $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$, so gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$|||A \cdot B||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$$

Diese Eigenschaft nennt sich Submultiplikativität.

2 Topologische Grundbegriffe

Konvention für Kapitel 2

Im folgenden sei stets $(V, \|\cdot\|)$ ein NLR.

Definition Offene Kugel, Delta-Umgebung

Für $x_0 \in V, \delta > 0$ heißt

$$U_\delta := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

die Umgebung oder offene Kugel um x_0 mit Radius δ.

Bemerkung

Es gilt:

$$\begin{aligned} A \subseteq V \text{ beschränkt} &\Leftrightarrow (\exists c > 0)(A \subseteq U_c(o)) \\ &\Leftrightarrow (\exists c > 0)(\exists x_0 \in V)(A \subseteq U_c(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 2.6 Innerer Punkt

Sei $A \subseteq V$.

(1) $x_0 \in V$ heißt innerer Punkt von $A :\Leftrightarrow (\exists \delta > 0)(U_\delta(x_0 \subseteq A))$

(2) $A^\circ :=$ Menge der inneren Punkte von A.

(3) A heißt offen $:\Leftrightarrow A^\circ = A$.

Satz 2.7

(1) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.

(2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

Bemerkung

Der Schnitt unendlich vieler offener Mengen ist im allgemeinen nicht mehr offen.

Definition 2.7 Häufungspunkt

Sei $A \subseteq V$.

(1) $x_0 \in V$ heißt Häufungspunkt/HP von $A :\Leftrightarrow (\forall \delta > 0)(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A \neq \emptyset)$.

(2) $H(A) :=$ Menge aller Häufungspunkte von A.

(3) $\overline{A} := A \cup H(A)$ heißt Abschluss von A.

(4) A heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow \overline{A} = A$

Satz 2.8

Voraussetzung: $A \subseteq V$

(1) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow V \setminus A$ ist offen.

(2) Die Vereinigung endl. vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(3) Der Durchschnitt bel. vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(4) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow H(A) \subseteq A$

Definition 2.8 Randpunkt

Sei $A \subseteq V$.

(1) $x_0 \in V$ heißt Randpunkt von A, falls gilt

$$(\forall \delta > 0)(U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\delta(x_0) \cap V \setminus A \neq \emptyset)$$

(2) $\partial A :=$ Menge aller Randpunkte/Rand von A

Hilfssatz

Es gilt $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Definition 2.9 Umgebung

Sei $x_0 \in V$. Dann heißt $U \subseteq V$ eine Umgebung von x_0, falls gilt

$$(\exists \delta > 0)(U_\delta(x_0) \subseteq U$$

Satz 2.9

Sei $A \subseteq V$.

(1) $x_0 \in H(A) \Leftrightarrow$ Es existiert eine Folge (x_n) in $A \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(2) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A liegt in A.

3 Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit

Definition Konvergenz von Reihen

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein NLR. Ist (x_n) Folge in V, so ist die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ durch die Konvergenz der Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_n\right)$ definiert.

Absolute Konvergenz wird durch die Konvergenz der Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \|x_n\|\right)$ definiert.

Für Banachräume gelten sinngemäß wie in $\mathbb{R}$:

- Majorantenkriterium
- Wurzelkriterium
- Quotientenkriterium

- Cauchykriterium

Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit einer submultiplikativen Norm $|||.|||$ Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Dann konvergiert die Reihe

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

absolut.

Definition 3.10 Grenzwert einer Funktion

Seien $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$ sei Häufungspunkt von D und $f : D \to W$ eine Funktion, weiterhin sei $y_0 \in W$. Dann definiert man

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow (\forall (x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\})(x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to y_0)$$

Satz 3.10

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$ HP von D, $f : D \to W$ Funktion, $y_0 \in W$

Dann ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{x_0\})(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

Definition 3.11 Stetigkeit

Seien $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$ und $f : D \to W$ eine Funktion.

Dann heißt f stetig in x_0 $:\Leftrightarrow$

$$(\forall (x_n)\ \text{in} D \setminus \{x_0\})(x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0))$$

Satz 3.11

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$, $f : D \to W$

Dann ist f genau dann stetig in x_0, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{x_0\})(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Hilfssatz

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $f, g : D \to W$, $w : D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) Sei x_0 Häufungspunkt von D und sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = z_0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lambda$. Dann gilt

- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\cdot(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \lambda(\alpha y_0 + \beta z_0)$
- $\lambda \neq 0 \implies$

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\})(h(x)\neq 0, \lim_{x\to x_0}\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lambda})$$

(2) Sei $x_0 \in D$ und f, g, h stetig in x_0. Dann ist $h\cdot(\alpha f + \beta g)$ stetig in x_0. Falls $h(x_0)\neq 0$, gilt außerdem

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\})(h(x)\neq 0)$$

und $\frac{1}{h} : U_\delta(x_0)\cap D \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0.

Hilfssatz

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$, $(Z, \|\cdot\|_3)$ NLRe, $D \subseteq V$, $\mathrm{E} \subseteq W$, $f : D \to W$, $g : \mathrm{E} \to Z$, $f(D) \subseteq \mathrm{E}$, $x_0 \in D$, f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$

Dann ist $g \circ f : D \to W$ stetig in x_0.

Definition 3.12 Stetigkeit auf Mengen

Seien $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$, $D \subseteq V$, $f : D \to W$.

Dann heißt f

- stetig auf D genau dann, wenn f stetig ist in jedem Punkt $x \in D$.
- gleichmäßig stetig auf D :$\Leftrightarrow$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in D)(\|x - y\|_1 < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_2)$$

- Lipschitz-stetig auf D :$\Leftrightarrow$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists L \geq 0)(\forall x, y \in D)(\|f(x) - f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_1)$$

Bemerkung

Lineare Abbildungen sind Lipschitz-stetig.

Definition Konvergenz bei Funktionenfolgen

Seien $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $(f_n) : D \to W$, $f : D \to W$

Dann heißt (f_n)

- punktweise/pw konvergent gegen f, wenn gilt

$$(\forall x \in D)(\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x))$$

- gleichmäßig/glm konvergent gegen f, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \geq n_0)(\forall x \in D)(\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon)$$

Satz 3.12

Voraussetzung: $D \subseteq V$, $(f_n) : D \to W$, $x_0 \in D$, $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n$ stetig in $x_0)$

Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so ist auch f stetig in x_0.

4 Kompakte Mengen

Konvention für Kapitel 4

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum.

Definition 4.13 Kompaktheit

$A \subseteq V$ heißt kompakt genau dann, wenn gilt:

Sind O_j $(j \in \mathrm{J})$ beliebige offene Teilmengen von V mit $A \subseteq \bigcup_{j\in \mathrm{J}} O_j$, so gibt es für jede solche Überdeckung endlich viele Teilmengen $O_{j_1}, \ldots O_{j_n}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} O_{j_n}$.

Satz 4.13

Voraussetzung: $A \subseteq V$ kompakt

A ist abgeschlossen und beschränkt.

Bemerkung

In unendlich dimensionalen Räumen sind beschränkte und abgeschlossene Mengen im allgemeinen nicht kompakt.

Satz 4.14 Satz von Heine-Borel

Voraussetzung: $(V_n; \|\cdot\|)$ n-dimensionaler NLR, $\emptyset \neq\ A \subseteq V_n$ abgeschlossen und beschränkt

A ist kompakt. ($\emptyset$ ist auch kompakt)

Satz 4.15

Voraussetzung: $(V_n; \|\cdot\|)$ n-dimensionaler NLR, $A \subseteq V_n$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist kompakt

(2) A ist beschränkt und abgeschlossen

(3) Jede Folge (x_n) in A besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_l}) mit $\lim\limits_{l\to\infty} x_{k_l} \in A$.

Bemerkung

Die Äquivalenz von (1) und (3) gilt auch in unendlich dimensionalen NLRen.

Satz 4.16

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|.\|_2)$ endlich dimensionale NLRe, $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ kompakt, $f : D \to W_n$ stetig

(1) $f(D)$ kompakt

(2) $W_m = \mathbb{R} \implies (\exists x_1, x_2 \in D)(f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2))$

Satz 4.17

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|.\|_2)$ endlich dimensionale NLRe, $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ kompakt, $f : D \to W_n$ stetig

Dann ist f gleichmäßig stetig auf D.

5 Differenzierbarkeit

Konvention für Kapitel 5

Ab jetzt betrachten wir nur noch endlich dimensionale NLRe, o.B.d.A. repräsentiert durch $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$. $\|.\|$ bezeichnet fast immer die Euklidnorm. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stets offen, $|||A|||$ sei wie in Satz 6 definiert. $\|x\|$ bezieht sich auf den Raum, aus dem x stammt.

Definition 5.14 Differenzierbarkeit

Sei $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann heißt f in x_0 differenzierbar/db/total-differenzierbar/Fréchet-differenzierbar genau dann, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

existiert mit

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$$

In diesem Fall heißt A Ableitung von f an der Stelle x_0.

Schreibweise: $f'(x_0) := A$.

Bemerkung

(1) Diese Def. ist in $\mathbb{R}$ äquivalent zur alten Definition.

(2) Falls sie existiert, ist die Ableitung eindeutig bestimmt.

(3) Ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf D. In diesem Fall ist durch $x \mapsto f'(x)$ eine Abbildung $f' : D \to \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben. Ist f' auch noch stetig auf D, so heißt f stetig differenzierbar auf D.

Schreibweise: $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$

Satz 5.18

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ db

Dann ist f stetig in x_0.

Beispiel

Ist $f = Ax + b$, so ist $f'(x) = A$.

Satz 5.19 Kettenregel

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^k$, $g(D) \subseteq \mathrm{E}$, g diffbar in x_0, f diffbar in $g(x_0)$

Sei $F := f \circ g$, $F : D \to \mathbb{R}^k$. Dann ist F diffbar in x_0, und es gilt:

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bemerkung

Die Menge der differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, das Differenzieren ist eine lineare Abbildung.

Definition 5.15 Partielle Ableitung

Seien $(e_1, \dots, e_n)$ und $(u_1, \dots, u_m)$ Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit den Komponentenfunktionen $f_k : D \to \mathbb{R}(k = 1 \dots m)$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \cdot u_k$$

Dann definiert man für $x_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$, $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ definiert man

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(x_0) := (f_i)_{\xi_j}(x_0) := (D_j f_i)(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_j) - f(x_0)}{t}$$

Falls der Grenzwert existiert, heißt er partielle Ableitung von f_i nach der j-ten Koordinate an der Stelle x_0.

Existieren alle partiellen Ableitungen, so heißt f an der Stelle x_0 partiell differenzierbar. Sind dann auch noch alle partiellen Ableitungen auf D stetig, so heißt f auf D stetig partiell differenzierbar.

Satz 5.20

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}^m$, f in $x_0 \in D$ db

Dann ist f in x_0 partiell db und es gilt für $j = 1, \dots, n$

$$f'(x_0)e_j = \sum_{i=1}^{n} D_j f_i u_i$$

Definition 5.16 Konvexität

Sei V ein VR. Eine Menge $\mathrm{A} \subseteq V$ heißt konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathrm{A}$ gilt:

$$s(x,y) := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0;1]\} \subseteq \mathrm{A}$$

Satz 5.21 Mittelwertsatz

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}$ db auf D, $a, b \in D, a \neq b, s(a,b) \subseteq D$

Dann existiert ein $\xi \in s(a,b) \setminus \{a,b\}$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

Bemerkung

Sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes für eine Funktion f erfüllt, ist D konvex und die Ableitung beschränkt, so ist f Lipschitz-stetig.

Satz 5.22

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}^m$

Dann gilt:

$$f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f \text{ ist auf } D \text{ stetig partiell db.}$$

Definition Gradient

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 partiell db, so schreibt man auch

$$\operatorname{grad} f(x_0) := ((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_n f)(x_0))$$

$\operatorname{grad} f(x_0)$ heißt dann der Gradient von f an der Stelle x_0. Ist f in x_0 diffbar, so ist $f'(x_0) = gradf(x_0)$. Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 db, so ist

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 5.17 Richtungsableitung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

falls dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v.

Bemerkung

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 partiell db, so ist

$$(D_j f)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$$

also die Richtungsableitung von f in Richtung e_j. $(j = 1, \ldots, n)$

Satz 5.23

Voraussetzung: $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 db, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0) \cdot v = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$$

(2)

$$\max\{\frac{\partial f}{\partial w}(x_0) \mid w \in \mathbb{R}^n, \|w\| = 1\} = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$$

6 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition Kontraktion

Sei $(V, \|\cdot\|)$ NLR, $\emptyset \neq A \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt eine Abbildung $g : A \to A$ mit $\|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\|$ für ein $q \in [0; 1)$ eine Kontraktion.

(Hoffe ich mal. So steht es im Beweis zum Satz über die Umkehrfkt.)

Satz 6.24 Fixpunktsatz von Banach

Voraussetzung: $(V, \|\cdot\|)$ vollständiger NLR, $\emptyset \neq A \subseteq V$ abgeschlossen, $g : A \to A$ Kontraktion

Dann existiert genau ein Fixpunkt $x \in A$ mit $g(x) = x$.

7 Vorbereitungen zum Satz über die Umkehrfunktion

Satz 7.25

Voraussetzung: $\Omega := \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ regulär}\}$

(1) Ist $A \in \Omega, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gilt

$$|||A - B||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||}$$

so ist B regulär.

(2) Ω ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \mapsto A^{-1}$ ist eine stetige Abbildung in Ω.

Satz 7.26

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $|||f'(x)||| < L$ auf D

Dann gilt für $x, y \in D$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

8 Satz über die Umkehrfunktion

Satz 8.27 Satz über die Umkehrfunktion

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ und $f'(x_0)$ regulär

(1) Es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 und eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $y_0 := f(x_0)$ derart, dass f auf U injektiv ist und $f(U) = \tilde{U}$ gilt.

(2) Ist $f^{-1} : \tilde{U} \to U$ die Inverse von $f : U \to \tilde{U}$ (wie in (1)), so ist $f^{-1} \in \mathrm{C}^1(\tilde{U}; \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = (f' \circ f^{-1}(x))^{-1} \quad (x \in \tilde{U})$$

Satz 8.28

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ regulär für alle $x \in D$

Dann ist $f(E)$ offen für jede offene Teilmenge $E \subseteq D$.

Bemerkung

Unter den obigen Voraussetzungen ist f auf einer Umgebung jedes beliebigen Punktes $x \in D$ injektiv. f heißt dann lokal-injektiv.

9 Der Satz über implizit definierte Funktionen

Konvention für Kapitel 9

Ist $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, y = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$, so schreiben wir einfach (x, y) für $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m)$.

Jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ lässt sich in zwei lineare Abbildungen A_x und A_y zerlegen, so dass

$$A_x x := A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_y y := A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Dann gilt $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_x x + A_y y$.

Satz 9.29

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$, A_x invertierbar

Zu jedem $y \in \mathbb{R}^m$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, nämlich

$$x = -(A_x)^{-1}A_y y$$

Satz 9.30 Satz über implizit definierte Funktionen

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und für $A = f'(x_0, y_0)$ sei A_x regulär

Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq D$ und $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $(x_0; y_0) \in U$ und $y \in \tilde{U}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem $y \in \tilde{U}$ ex. genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, y) \in U$ und $f(x, y) = 0$.

(2) Definiert man $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ durch $g(y)$:=das eindeutig bestimmte x aus (1), so gilt $g(y_0) = x_0$, $f(g(y_0), y_0) = 0 (y \in \tilde{U})$ und $g \in \mathrm{C}^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$.
Ferner gilt: $g'(y_0) = -(A_x)^{-1}A_y$ bzw. auch allgemeiner

$$g'(y) = -f'(g(y), y)_x^{-1} f'(g(y), y)_y \quad (y \in \tilde{U})$$

Trick Merkregel zum Satz

Sei $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $h(y) := f(g(y), y)$. Sei weiter $y \in \tilde{U}$, also

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dy} = 0 \underset{h\in\mathrm{C}^1}{=} \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial g,y}\frac{\partial g,y}{\partial y} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial g} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ I_m \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

Deswegen gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

10 Ableitungen höherer Ordnung

Konvention für Kapitel 10

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 10.18 Mehrfache partielle Differentiation

Sei f partiell db auf D mit den partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$. Sind $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f : D \to \mathbb{R}$ partiell db, so sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f definiert durch

$$D_{ij} f := f_{\xi_j \xi_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \xi_j} := D_i(D_j f)$$

Faustregel: Immer vom f aus lesen ergibt die Reihenfolge von innen nach außen.

Definition 10.19 Mehrfache stetige Differenzierbarkeit

f heißt auf D k-mal stetig db $:\Leftrightarrow$ Jede k-fache partielle Ableitungen von f nach einer beliebigen Kombination von Koordinaten existiert und ist stetig.

Schreibweise: $f \in \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R})$

Analog definiert man:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R}^m) &:= \{f = (f_1, \ldots, f_m) \mid (\forall 1 \leq j \leq m)(f_j \in \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R}^m))\} \\ \mathrm{C}^0(D, \mathbb{R}^m) &:= \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^m) \\ \mathrm{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m) &:= \bigcap_{k \geq 0} \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

Satz 10.31 Satz von Schwarz

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \in \mathrm{C}^2(D, \mathbb{R})$

Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, dass $D_{ij} f = D_{ji} f$.

Bemerkung

Ist $f \in \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R})$, so folgt aus dem Satz von Schwarz, dass bei $\leq k$-facher Differentiation die Reihenfolge keine Rolle spielt.

11 Der Satz von Taylor

Definition Multi-Index

Sei $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann nennt man p auch einen Multiindex und definiert

$$|p| := p_1 + \ldots + p_n$$
$$p! := p_1! \cdot \ldots \cdot p_n!$$

und für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$$x^p := \xi_1^{p_1} \cdot \xi_2^{p_2} \cdots \xi_n^{p_n}$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{C}^{|p|}(D, \mathbb{R})$. Dann definiert man

$$D^p f := D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n} f := \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}}$$

Satz 11.32

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^k(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $s(x, x+h) \subseteq D$, $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = f(x + th)$

Dann ist $\Phi \in \mathrm{C}^k([0,1], \mathbb{R})$ und es gilt

$$\Phi^{(\nu)}(t) = \sum_{|p| = \nu} \frac{\nu!}{p!} (D^p f)(x + th) h^p$$

Satz 11.33 Satz von Taylor

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $s(x, x+h) \subseteq D$

Dann existiert ein $\Theta \in [0,1]$ mit

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|p| \leq k} \frac{(D^p f)(x)}{p!} h^p}_{k\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\sum_{|p| = k+1} \frac{(D^p f)(x + \Theta h)}{p!} h^p}_{\text{Restglied}}$$

Definition 11.20 Hesse-Matrix

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{C}^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_{\xi_1}(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_{\xi_n}(x) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle x.

Für $k = 1$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ lautet der Satz von Taylor also: Zu $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $s(x, x+h) \subseteq D$ existiert ein $\Theta \in [0, 1]$ mit

$$f(x+h) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x)) \cdot h + \frac{1}{2} h(H_f(x + \Theta h)h)$$

Wegen $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ist nach dem Satz von Schwarz $H_f(x) = H_f^T(x)$.

12 Extremwerte

Definition 12.21 Extremum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann hat $f : M \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in M$ ein lokales $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$:⇔

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0))$$

x_0 heißt lokales Extremum genau dann, wenn x_0 lokales Minimum oder Maximum ist.

Satz 12.34

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 lok. Extremum von f, f in x_0 partiell db

Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

Bemerkung

Obiger Satz gibt nur ein *notwendiges*, kein *hinreichendes* Kriterium für ein Extremum an.

Definition 12.22 Quadratische Form

Sei $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann heißt die Abbildung $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Q_A(x) := x^T(Ax)$$

die zu A gehörende quadratische Form. Sie heißt

positiv definit (pd)	$:\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(Q_A(x) > 0)$
negativ definit (nd)	$:\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(Q_A(x) < 0)$
positiv semidefinit (psd)	$:\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(Q_A(x) \geq 0)$
negativ semidefinit (nsd)	$:\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(Q_A(x) \leq 0)$
indefinit (id)	$:\Leftrightarrow (\exists u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(Q_A(u) \cdot Q_A(v) < 0)$

Bemerkung

(1) Sei $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_j a_{ij} \xi_i$$

(2) Ist $n = 2$, so gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ pd} &\Leftrightarrow a_{11} > 0 \wedge \det A > 0 \Leftrightarrow \text{ Alle Eigenwerte von } A > 0 \\ A \text{ nd} &\Leftrightarrow a_{11} < 0 \wedge \det A > 0 \Leftrightarrow \text{ Alle Eigenwerte von } A < 0 \\ A \text{ id} &\Leftrightarrow \det A < 0 \Leftrightarrow \text{ Es ex. EW} > 0 \text{ und } < 0 \end{aligned}$$

(3) A ist pd $\Leftrightarrow -A$ ist nd.

(4) $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \implies Q_A(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x)$

Satz 12.35

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch

(1) A ist $\substack{\text{positiv} \\ \text{negativ}}$ definit $\Leftrightarrow$

$$(\exists c > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^n)(Q_A(x) \underset{\leq -}{\geq} c \cdot \|x\|^2)$$

(2) Sei A pd (nd,id). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$(\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n})(|||A - B||| \leq \varepsilon \implies B \text{ pd (nd,id)})$$

Zusätzlich: Ist A id, so existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $Q_B(u) > 0$, $Q_B(v) < 0$ für jede symmetrische Matrix B mit $|||A - B||| \leq \varepsilon$.

Satz 12.36

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

(1) $H_f(x_0)$ ist pd $\implies$ f hat in x_0 ein lokales Minimum

(2) $H_f(x_0)$ ist nd $\implies$ f hat in x_0 ein lokales Maximum

(3) $H_f(x_0)$ ist id $\implies$ f hat in x_0 kein lokales Extremum

Bemerkung

- In $\mathbb{R}$ tritt Fall (3) nicht ein.
- Ist $H_f(x_0)$ positiv/negativ semidefinit, so folgt *nichts* über die Existenz von Extremstellen.

13 Extremstellen unter Nebenbedingungen

Konvention für Kapitel 13

Es sei stets $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $T := \{x \in D \mid \varphi(x) = 0\}$

Definition 13.23 Extremum unter Nebenbedingungen

f hat in $x_0 \in D$ ein lokales $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$ unter der Nebenbedingung (Nb) $\varphi(x_0) = 0$ genau dann, wenn gilt

$$x_0 \in T \wedge (\exists \delta > 0)(U_\delta(x_0) \subseteq D) \wedge (\forall x \in U_\delta(x_0) \cap T)(f(x) \underset{\geq}{\overset{\leq}{}} f(x_0))$$

Konvention für Kapitel 13

Man definiert sich zusätzlich eine Hilfsfunktion $H : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(x, \lambda) :=& f(x) + \lambda \varphi(x) \\ =& f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x) \end{aligned}$$

Bemerkung

$D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist offen. Falls existent, gilt:

$$H'(x, \lambda) = \operatorname{grad} H(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f'(x) + \lambda\varphi'(x) & \varphi(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n+m}$$

D.h. für $x_0 \in D$ mit $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda_0 = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ gilt:

$$H'(x_0, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + \lambda\varphi'(x_0) = 0 \wedge x_0 \in T$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} H_{\xi_1}(x_0, \lambda_0) &= f_{\xi_1}(x_0) + \lambda_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_1(x_0) + \ldots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_m(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ H_{\xi_n}(x_0, \lambda_0) &= f_{\xi_n}(x_0) + \lambda_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \varphi_1(x_0) + \ldots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \varphi_m(x_0) = 0 \\ H_{\lambda_1}(x_0, \lambda_0) &= \varphi_1(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ H_{\lambda_m}(x_0, \lambda_0) &= \varphi_m(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Satz 13.37 Multiplikatorenregel von Lagrange

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in D$ lokales Extremum von f mit Nb $\varphi(x_0) = 0$ und $\operatorname{rank} \varphi'(x_0) = m$

Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $H'(x_0, \lambda_0) = 0$ (s. auch obiges Gleichungssystem)

Anmerkung zu Fragen, die man sich zum Verfahren stellen kann

Warum bringen einen die lokalen Extrema von f meist nicht weiter?

Dazu stelle man sich den Graphen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ als Berglandschaft vor (das ist ein Tal bei $(0, 0)$, mit nach jeder Seite parabolischem Anstieg). f hat genau ein (lokales und globales) Extremum im Nullpunkt. Man suche aber Extrema z.B. unter der Bedinung $|x| = 1 \vee |y| = 1$, d.h. z.B. $\varphi(x, y) = (|x| - 1) \cdot (|y| - 1)$. Dann hat die Funktion zwar Extrema unter Nebenbedingung, diese fallen aber nicht mit dem Extremum von f zusammen!

Wie funktioniert das Verfahren?

H bestimmen, Ableitung nullsetzen führt auf eine Menge von Kandidatenstellen. Man sichert dann die Existenz des gesuchten Extremums (Z.B. mit Hilfe des weiter unten stehenden Tricks) und sucht unter den (hoffentlich wenigen) verbleibenden Kandidatenstellen das globale Minimum unter Nebenbedingung.

Was passiert mit H, wenn die Nebenbedingung nicht erfüllt ist?

Dazu nehme man an, man habe ein (lokales) Extremum von f in x_1 aufgespürt, das aber die Nebenbedingung nicht erfüllt. Dann existiert mindestens ein j, so dass man mittels λ_j die Hilfsfunktion H in einer beliebig kleinen Umegubng in beliebige Richtung verändern kann. Dies bedeutet: H hat keine lokalen Minima dort, wo die Nebenbedingung nicht erfüllt ist. (Dies sieht man auch leicht an der Ableitung H': Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist $\varphi(x) = 0$.)

Was passiert mit H, wenn die Nebenbedingung erfüllt ist?

In diesem Moment stimmt H vollständig mit f überein, daran ändert λ nichts. Wenn es einem also gelingt, H lokal zu minimieren, dann erhält man eine Stelle, die (s.o.!) die Nebenbedingung erfüllt und auch f (lokal) minimiert. Bleibt die entscheidende Frage:

Erwischt man so auch garantiert alle solchen Stellen, d.h. gilt für jedes lokale Extremum von f unter Nebenbedingung auch $H' = 0$?

Ja, in gewissen Grenzen. Das ist genau die Aussage des obigen Satzes. Äquivalent formuliert: Wird die Ableitung von H auch einmal Null, wenn f ein Extremum unter Nebenbedingung hat? D.h. findet man dann ein passendes λ, so dass auch $H' = 0$ wird? $\operatorname{rank} \varphi' = m$ stellt sicher, dass man an dieser Stelle λ_0 geeignet wählen kann, damit $-\operatorname{grad} f = (\varphi' \lambda_0)^T \iff H' = 0$ gilt (Theorie der LGSe!)

Trick Beweis der Existenz eines Extremums

Sei $T := \{x \in D \mid \varphi(x) = 0\}$. Dann definiert man sich eine kompakte Menge $K := T \cap \{x \mid x_1 \leq r, \ldots, x_n \leq r\}$ und zeigt, dass auf $T \setminus K$ alle Funktionswerte größer/kleiner als die am betrachteten kritischen Punkt sind. (r durch Ausprobieren wählen) Dann existiert ein Minimum/Maximum von f auf K, und es gilt

$$\min f(T) = \min f(K)$$

so dass die Existenz eines Extremums gesichert ist. (es sollte halt nur kein Randextremum von K sein)

14 Wege

Definition 14.24 Weg

Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($[a,b] \subseteq \mathbb{R}$) heißt ein Weg.

$\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt von γ.

$\gamma(b)$ heißt Endpunkt von γ.

$[a,b]$ heißt Parameterintervall von γ.

γ ist "orientiert", d.h. $\gamma(t_1)$ wird "vor" $\gamma(t_2)$ durchlaufen $\Leftrightarrow t_1 < t_2$.

$\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$ mit $t \in [a,b]$ heißt zu γ inverser Weg.

Definition Bogen

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Dann heißt

$$\Gamma := \Gamma_\gamma := \gamma([a,b])$$

der zum Weg γ gehörende Bogen.

Bemerkung

Γ ist kompakt, da $[a,b]$ kompakt und γ stetig.

Definition 14.25 Länge

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

$$L(\gamma, z) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

γ heißt rektifizierbar/rb $:\Leftrightarrow$

$$(\exists M \geq 0)(\forall z \text{ Zerlegung von } [a,b])(L(\gamma, z) \leq M)$$

In diesem Fall heißt

$$L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, z) \mid z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

die Länge des Weges γ.

Satz 14.38

Voraussetzung: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$

Dann gilt γ rektifizierbar $\Leftrightarrow$

$$(\forall j \in \{1, \ldots, n\})(\gamma_j \in \mathrm{BV}([a,b], \mathbb{R}))$$

Bemerkung

Ist der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rb, so ist $\gamma|_{[c,d]}$ ebenfalls rb. ($[c,d] \subseteq [a,b]$)

Bemerkung

Ist der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rb, so ist γ^- auch rb und es gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma^-)$$

Definition 14.26 Weglängenfunktion

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Dann heißt

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a,t]}) & t \in (a,b] \\ 0 & t = a \end{cases}$$

Weglängenfunktion von γ.

Bemerkung

Es gilt $s(b) = L(\gamma)$.

Analog wie bei Funktionen von beschränkter Variation zeigt man, dass s auf $[a,b]$ monoton wächst und es gilt

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\gamma|_{[t_1,t_2]})$$

Definition 14.27 Integral über einen Weg

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Dann definiert man

$$\int_a^b \gamma(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b \gamma_1(t)dt & \ldots & \int_a^b \gamma_n(t)dt \end{pmatrix}$$

Satz 14.39

Voraussetzung: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Weg

Dann gilt

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

Satz 14.40

Voraussetzung: $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$

(1) γ ist rb.

(2) $s \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$.

(3) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, also $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$

Definition 14.28 Stückweise stetige Differenzierbarkeit

Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stückweise stetig db $:\Leftrightarrow$

$$(\exists z = \{t_0, \ldots, t_m\} \text{ Zerl. von } [a,b])(\forall k \in \{1, \ldots, m\}) \\ (\gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in \mathrm{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}))$$

Man definiert außerdem dann zu gegebener Zerlegung $z = \{t_0, \ldots, t_m\}$

$$\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$$

Bemerkung

Stückweise stetig differenzierbare Wege sind rb und es gilt

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^m L(\gamma_k) = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt$$

Definition 14.29 Parametertransformation

Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ Wege. Dann ist

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow (\exists h : [a,b] \to [\alpha,\beta] \text{ stetig, bijektiv, wachsend})(\gamma_1 = \gamma_2 \circ h)$$

Bemerkung

(1) Die Eigenschaften von h implizieren, dass h streng monoton ist und $h(a) = \alpha$, $h(b) = \beta$.

(2) Ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$, so ist $\Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$.

(3) "$\sim$" ist Äquivalenzrelation.

(4) γ_1, γ_2 haben gleiche Orientierung, da h wachsend.

Definition 14.30 Glattheit

Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt glatt $:\Leftrightarrow \gamma \in \mathrm{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $\gamma'(t) \neq 0$. $(t \in [a, b])$

Satz 14.41

Voraussetzung: $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ Wege, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ und h Parametertransformation so, dass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$

Dann gilt:

(1) γ_1 rb $\Leftrightarrow \gamma_2$ rb. In diesem Fall $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

(2) γ_1, γ_2 glatt $\implies h \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $h'(t) > 0$ $(t \in [a, b])$

Satz 14.42

Voraussetzung: $\gamma : [a : b] \to \mathbb{R}$ rb Weg, $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ Weglängenfunktion

s ist wachsend und stetig.

Bemerkung Weglänge als Parameter

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbarer Weg und $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ die zugehörige Weglängenfunktion. Dann gilt:

(1) $s \nearrow$, $s \in \mathrm{C}([a, b] \to \mathbb{R})$

(2) $s(a) = 0$, $s(b) = L(\gamma)$, $s([a, b]) = [0, L(\gamma)]$

Sei nun s streng wachsend auf $[a, b]$. (z.B. wenn γ auf $[a, b]$ injektiv oder glatt ist) Dann ist s bijektiv und man definiert $\sigma := s^{-1}$, $\sigma : [0, L(\gamma)] \to [a, b]$. Dann gilt:

(1) $\sigma \nearrow$, $\sigma \in \mathrm{C}([0, L(\gamma)], [a, b])$

(2) $\sigma(0) = a$, $\sigma(L(\gamma)) = b$, $\sigma([0, L(\gamma)]) = [a, b]$

Setze nun $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma$ und es gilt $\gamma \sim \tilde{\gamma}$. $\tilde{\gamma}$ heißt Parameterdarstellung von $\Gamma := \Gamma_\gamma$. Sei $\varphi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}$ die Weglängenfunktion von $\tilde{\gamma}$. Sei $\tau \in [0, L(\gamma)]$. Dann existiert genau ein $t \in [a, b]$ mit $s(t) = \tau$ und es gilt $\sigma([0, \tau]) = [a, t]$. Also auch

$$\varphi(\tau) = L(\tilde{\gamma}|_{[0,\tau]}) = L(\gamma|_{[a,t]}) = s(t) = \tau$$

für alle $t \in [0, L(\gamma)$.

Satz 14.43

Voraussetzung: $\gamma : [a : b] \to \mathbb{R}$ glatter Weg, $\tilde{\gamma}$ Parameterdarstellung von Γ_γ

$\tilde{\gamma}$ ist glatt und $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$. $(t \in [0, L(\gamma))$

Bemerkung

Es gilt: $\gamma'(t) = h'(t) \cdot \tilde{\gamma}'(h(t)) > 0$.

Im Falle $n = 2$ heißt $u := (-\gamma_2(t), \gamma_1(t))$ positiver Normalenvektor und es gilt $u \perp \gamma'(t)$.

15 Wegintegrale

Definition 15.31 Wegintegral

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg und $f \in \mathrm{C}(\Gamma_\gamma, \mathbb{R}^n)$. Sei weiterhin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Dann heißt

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_\gamma f(x) \cdot dx := \int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j := \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t)$$

Wegintegral von f längs γ. Außerdem definiert man

$$\int_\gamma f_j(x)dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t)$$

für alle $j = 1 \dots n$.

Satz 15.44

Voraussetzung: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ rb Weg, $f, g \in \mathrm{C}(\Gamma_\gamma, \mathbb{R}^n)$

(1)

$$\int_\gamma \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_\gamma f(x)dx + \beta \int_\gamma f(x)dx$$

(2) Für jedes $c \in [a,b]$:

$$\int_\gamma f(x)dx = \int_{\gamma|_{[a,c]}} f(x)dx + \int_{\gamma|_{[c,b]}} f(x)dx$$

(3)

$$\int_{\gamma^-} f(x)dx = -\int_\gamma f(x)dx$$

(4)

$$\left|\int_\gamma f(x)dx\right| \leq L(\gamma) \max_{x\in\Gamma_\gamma}\{\|f(x)\|\}$$

Satz 15.45

Voraussetzung: $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathrm{C}(\Gamma_\gamma,\mathbb{R}^n)$

Dann gilt

$$\int_\gamma f(x)dx = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{Skalarprodukt!}} dt$$

Bemerkung

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig db Weg und $z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in \mathrm{C}^1([t_{k-1},t_k],\mathbb{R}^n)$, $k = 1,\ldots,m$, so gilt

$$\int_\gamma f(x)dx = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(x)dx$$

Satz 15.46

Voraussetzung: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ rb Wege mit $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, $\Gamma := \Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$, $f \in \mathrm{C}(\Gamma,\mathbb{R}^n)$

Dann gilt

$$\int_\gamma f(x)dx = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)dx$$

Definition 15.32 Wegintegral bzgl. Weglänge

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rb Weg. Da $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend ist, gilt $s \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Sei weiter $f \in \mathrm{C}(\Gamma_\gamma,\mathbb{R})$. Dann ist $f \in \mathrm{R}_s([a,b],\mathbb{R})$ und es heißt

$$\int\limits_\gamma f(x)ds := \int\limits_a^b f(\gamma(t))ds(t)$$

Wegintegral von f längs γ bezüglich der Weglänge.

Bemerkung

(1) Ist $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, so ist $s \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ $(t \in [a,b])$ (nach Satz 40). Somit ist

$$\int\limits_\gamma f(x)ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

(2) Ist γ glatt, $\sigma := s^{-1}$, so gilt:

$$\int\limits_\gamma f(x)ds = \int\limits_0^{L(\gamma)} f(\gamma(\sigma(\tau)))d\tau$$

16 Stammfunktionen

Definition 16.33 Gebiet

Eine Menge $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet $:\Leftrightarrow$ G ist offen und für alle Punkte $x_0, y_0 \in G$ existiert ein Weg $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = y_0$.

Bemerkung

Jede offene nicht-leere konvexe Menge ist ein Gebiet.

Definition 16.34 Stammfunktion

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. $F : G \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion/SF von f auf G $:\Leftrightarrow$ F db auf G und $F'(x) = \operatorname{grad} F(x) = f(x)$ $(x \in G)$

Schreibweise:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Bemerkung

Im Fall $n = 1$ gilt: G Gebiet $\Leftrightarrow$ G offenes Intervall.

In diesem Fall hat jede auf G stetige Funktion eine Stammfunktion.

Bemerkung

Ist $f \in \mathrm{C}(G, \mathbb{R}^n)$ und $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf G, so ist $F \in \mathrm{C}^1(G, \mathbb{R})$.

Satz 16.47

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $x_0, y_0 \in G$, $\gamma : [a, b] \to G$ ein Weg mit $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = y_0$

Dann ex. eine Zerlegung $z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a, b]$ so, dass

$$s(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \subseteq G$$

für alle $k = 1, \ldots, n$.

Bemerkung

Insbesondere erhält man damit einen stückweise stetig db Weg in G, der x_0 mit y_0 verbindet.

Satz 16.48

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $g : G \to \mathbb{R}$ auf G db mit $g'(x) = 0$

Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $g(G) = c$. (also g konstant auf G)

Bemerkung

Dies bedeutet, dass Stammfunktionen, falls vorhanden, bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind.

Satz 16.49 Integrabilitätsbedingung

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in \mathrm{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$

Besitzt f eine Stammfunktion F auf G, so gilt ($f = (f_1, \ldots, f_n)$)

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j}$$

für alle $k, j \in \{1, \dots, n\}$.

Bemerkung

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht, für C^1-Funktionen gibt er jedoch ein notwendiges Kriterium für Integrabilität an.

Satz 16.50

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in \mathrm{C}(G, \mathbb{R}^n)$, $F : G \to \mathbb{R}$ SF von f, $\gamma : [a, b] \to G$ stückweise stetig db Weg

Dann gilt

$$\int_\gamma f(x)dx = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Definition 16.35 Wegunabhängigkeit

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in \mathrm{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt $\int f(x)dx$ in G wegunabhängig $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige zwei Punkte $x, y \in G$ und jeden stückweise stetig db Weg $\gamma : [a, b] \to G$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$

$$\int_\gamma f(x)dx = \alpha$$

In diesem Fall schreibt man

$$\int_x^y f(x)dx \text{ statt } \int_\gamma f(x)dx$$

Bemerkung

Die Aussage von Satz 16.50 bedeutet, dass die Stammfunktion einer durch die Voraussetzungen des Satzes bestimmten Funktion wegunabhängig ist.

Satz 16.51

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in \mathrm{C}(G, \mathbb{R}^n)$, $\int f(x)dx$ wegunabh. in G

Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G. Eine solche ist z.B.

$$F(z) := \int_{x_0}^z f(x)dx \quad (x_0, z \in G, x_0 \text{ fest})$$

Satz 16.52

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexes Gebiet, $f \in \mathrm{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) f besitzt auf G eine SF

(2) f erfüllt die Integrabilitätsbedingung

(3) $\int f(x)dx$ ist wegunabhängig in G

17 Quader

Definition 17.36 Koordinatenvergleich

Für $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} a \leq b &:\Leftrightarrow \alpha_j \leq \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ a \ll b &:\Leftrightarrow \alpha_j < \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien

$$[\alpha, \alpha] = (\alpha, \alpha) = [\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha] = \emptyset$$

Dann heißen

$$\begin{aligned} Q[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\} = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n] \\ Q(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \ll x \ll b\} = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \end{aligned}$$

Quader.

Hilfssatz

Es gilt $Q[a, b]$ ist abgeschlossen, $Q(a, b)$ ist offen. Quader haben folgende Eigenschaften

(1) $Q[a, b] = \emptyset \Leftrightarrow (\exists j \in \{1, \ldots, n\})(\alpha_j = \beta_j)$

(2) $Q(a, b) = Q[a, b]^\circ$ und $\partial Q[a, b] = Q[a, b] \setminus Q(a, b)$ $(a \leq b)$

(3) $\overline{Q(a, b)} = Q[a, b]$ $(a \ll b)$

Definition 17.37 Inhalt

Sei $Q[a, b]$ ein Quader und $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$|Q[a, b]| := \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$$

Inhalt von Q.

Definition 17.38 Zerlegung

z heißt Zerlegung von $Q[a,b]$ $:\Leftrightarrow$

$$z = z_1 \times \cdots \times z_n$$

mit $z_j = \{t_1^{(j)}, \dots, t_n^{(j)}\}$ Zerlegung von $[\alpha_j, \beta_j]$.

Bemerkung

Eine Zerlegung z erzeugt Teilquader $Q_1, \dots, Q_m$ der Form

$$Q_k = [t_{l_1}^{(1)}, t_{l_1+1}^{(1)}] \times \ldots \times [t_{l_n}^{(n)}, t_{l_n+1}^{(n)}]$$

Satz 17.53

Voraussetzung: $Q[a,b]$ Quader, z Zerlegung von $Q[a,b]$, $Q_1, \dots, Q_m$ die von z erzeugten Teilquader

Dann gilt

$$|Q[a,b]| = \sum_{k=1}^{n} |Q_k| \text{ und } Q[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$$

Definition 17.39 Quadersumme

S heißt Quadersumme genau dann, wenn es abgeschlossene Quader $Q_1, \dots, Q_m$ mit

(1) $S = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$

(2) ${Q_i}^\circ \cap {Q_k}^\circ = \emptyset$ $(i, k = 1, \dots, n, i \neq k)$

gibt.

Ist S Quadersumme, so heißt

$$|S| := \sum_{k=1}^{m} |Q_k|$$

Inhalt von S.

Satz 17.54

Voraussetzung: $Q_1, \dots, Q_m$ abgeschlossene Quader

Dann gilt:

(1) Dann ist

$$S := \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$$

eine Quadersumme, und es gilt weiter

$$|S| \leq \sum_{k=1}^{m} |Q_k|$$

(2) Sind $T, S \subseteq \mathbb{R}^n$ Quadersummen mit $S \subseteq T$, so gilt $|S| \leq |T|$

Konvention für Kapitel 17

Sei

$$\mathcal{M} := \{(\alpha,\beta), (\alpha,\beta], [\alpha,\beta), [\alpha,\beta] \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta\}$$

Mit R_n bezeichnet man die Menge aller beschr. Quader in $\mathbb{R}^n$:

$$R_n := \{I_1 \times \ldots \times I_n \mid I_j \in \mathcal{M}\} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Satz 17.55

Voraussetzung: $Q, \tilde{Q} \in R_n$

Dann gilt

(1) $Q \cap \tilde{Q} \in R_n$

(2) Es existieren $Q_1, \ldots, Q_n \in R_m$ mit $Q \setminus \tilde{Q} = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$

Satz 17.56

Voraussetzung: $Q_1, Q_2, \ldots \in R_n$ höchstens abzählbar viele Quader mit $\mathcal{M} = \bigcup_k Q_k$

Dann gibt es höchstens abzählbar viele $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots \in R_n$ mit $\mathcal{M} = \bigcup_k \tilde{Q}_k$, wobei die $\tilde{Q}_k$ paarweise disjunkt sind.

Satz 17.57

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Dann existiert eine Menge von höchstens abzählbar vielen paarweise disjunkten $Q_1, Q_2, \ldots \in R_n$ mit $D = \bigcup_k Q_k$ und $\overline{Q_k} \subseteq D$ für alle k.

18 Das äußere Lebesgue-Maß

Definition 18.40 Äußeres Lebesgue-Maß

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei

$$J_A := \{\{Q_1, Q_2, \ldots\} \subseteq R_n \mid A \subseteq \bigcup_k Q_k \wedge \text{ höchstens abz. unendl. }\}$$

Dann ist $J_A \neq \emptyset$ und es heißt

$$\lambda(A) := \inf\{\sum_k |Q_k| \mid \{Q_1, Q_2, \ldots\} \in J_A\}$$

äußeres Lebesgue-Maß (L-Maß) von A. (∞ ist als Wert von $\lambda(A)$ zugelassen)

Beispiel

(1) $\lambda(\{x\}) = 0$

(2) $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

(3) Sei H eine Hyperebene der Form $\xi_j = c$. Dann ist $\lambda(H) = 0$

(4) $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\mathbb{R}^n) = \infty$

(5) Sei $Q \in R_n$ abgeschlossen. Dann gilt $\lambda(Q) = |Q|$.

Satz 18.58

Es gilt

(1) $(\forall A \subseteq \mathbb{R}^n)(0 \leq \lambda(A) \leq \infty)$

(2) $(\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n)(A \subset B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$

(3) σ-Subadditivität: Sei $(A_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ endlich. Dann ist

$$\lambda(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \lambda(A_k)$$

Beispiel

Sei $Q \in R_n$ beliebig. Dann gilt $\lambda(Q) = |Q|$.

Bemerkung

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist $\lambda(A) < \infty$.

Definition 18.41 Nullmenge

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge/NM $:\Leftrightarrow \lambda(N) = 0$.

Bemerkung

Es ergibt sich

(1) Die Vereinigung endlich vieler Nullmengen hat das Lebesgue-Maß 0.

(2) N endlich/ abz. unendlich $\implies$ N ist Nullmenge.

(3) Jede Teilmenge einer NM ist NM.

(4) Sei H eine Hyperebene der Form $\xi_j = c$. Dann ist H Nullmenge.

Definition 18.42 fast überall

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (E) eine Eigenschaft von Punkten aus A. Dann sagt man: (E) gilt fast überall/fü in A (bzw. für fast alle $x \in A$) $:\Leftrightarrow \lambda(\{x \in A \mid (E) \text{ gilt nicht für } x\}) = 0$

19 Das Lebesgue'sche Maß

Definition 19.43 Lebesgue-Messbarkeit

$A \in \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar genau dann, wenn

$$(\forall E \subseteq \mathbb{R}^n)(\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)))$$

Bemerkung

Wegen Satz 18.58 reicht in der obigen Definition die Eigenschaft

$$(\forall E \subseteq \mathbb{R}^n)(\lambda(E) \geq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)))$$

Man definiert $\mathcal{L} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ Lebesgue-messbar}\}$.

Beispiel

(1) Ist N eine Nullmenge, so gilt $N \in \mathcal{L}$.

(2) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}$

Definition 19.44 Volumen

Für $A \in \mathcal{L}$ heißt $\lambda(A)$ das Volumen von A.

Satz 19.59

$\mathcal{L}$ hat folgende Eigenschaften:

(1) $A \in \mathcal{L} \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{L}$

(2) $\mathbb{R}^n, \emptyset$ und jede Nullmenge sind $\in \mathcal{L}$

(3) $A, B \in \mathcal{L} \implies A \setminus B \in \mathcal{L}$

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L} \implies \bigcap_k A_k \in \mathcal{L}, \bigcup_k A_k \in \mathcal{L}$

$\lambda : \mathcal{L} \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ hat folgende Eigenschaften:

(1) σ-Additivität: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$ paarweise disjunkt $\implies$

$$\lambda(\bigcup_k A_k) = \sum_k \lambda(A_k)$$

(2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies$

$$\lambda(\bigcup_k A_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k)$$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\lambda(A_1) < \infty \implies$

$$\lambda(\bigcap_k A_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k)$$

Satz 19.60

Es gilt $R_n \subseteq \mathcal{L}$.

Bemerkung

Aus dem vorigen Satz geht direkt hervor:

(1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies A \in \mathcal{L}$

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies A \in \mathcal{L}$

(3) $A_1, A_2, A_3, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies \bigcup_k A_k \in \mathcal{L}$ ("G_δ-Menge")

(4) $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $A \in \mathcal{L}$, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$A \times [\alpha, \beta] \in \mathcal{L} \text{ und } \lambda(A \times [\alpha, \beta]) = \lambda(A) \cdot (\beta - \alpha)$$

20 Messbare Funktionen

Konvention für Kapitel 20

Sei $M \in \mathcal{L}$. Für Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ sei vereinbart

$$\{f < g\}_M := \{x \in M \mid f(x) < g(x)\}$$

Analog für $\leq, >, \geq$.

Satz 20.61

Voraussetzung: $f : M \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\{f < t\}_M \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \{f \leq t\}_M \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \{f > t\}_M \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \{f \geq t\}_M \in \mathcal{L}$$

Definition 20.45 Lebesgue-Messbarkeit einer Funktion

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)messbar auf M :$\Leftrightarrow$

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\{f \leq t\}_M \in \mathcal{L})$$

Schreibweise: $f \in \mathcal{L}(M)$

Satz 20.62

Voraussetzung: $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen $s, t \in \mathbb{R}$

Dann gilt:

(1) $f, g \in \mathcal{L}(M) \implies \{f < g\}_M, \{f > g\}_M, \{f \leq g\}_M, \{f \geq g\}_M \in \mathcal{L}$ bzw. $\{s \overset{<}{\underset{\leq}{}} f \overset{<}{\underset{\leq}{}} t\} \in \mathcal{L}$

(2) $B \in \mathcal{L}, B \subseteq M, f \in \mathcal{L}(M) \implies f \in \mathcal{L}(B)$

(3) $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{L}$ endlich/abzählbar viele Mengen, $M = \bigcup_k B_k$, $f \in \mathcal{L}(B_k)$ für $k \in \mathbb{N} \implies f \in \mathcal{L}(M)$

(4) $N \subseteq M$ Nullmenge (also $N, M \setminus N \in \mathcal{L}$) und $h \in \mathcal{L}(M \setminus N)$, $f|_{M \setminus N} = h \implies f \in \mathcal{L}(M)$

Satz 20.63

Voraussetzung: $f, g : M \to \mathbb{R}$, $f = g$ f.ü. auf M

Dann gilt $f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}(M)$.

Definition 20.46 Maximum/Minimum-Verknüpfung bei Funktionen

Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann definiert man für $x \in M$

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \\ (f \wedge g)(x) &:= \min\{f(x), g(x)\} \\ f^+ &:= f \vee 0 \\ f^- &:= -(f \wedge 0)\end{aligned}$$

Es ergibt sich $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$.

Satz 20.64

Es gilt:

(1) $f_1, f_2, \ldots : M \to \mathbb{R}$, $f_i \in \mathcal{L}(M)$ $(i \in \mathbb{N})$ endlich/abz. viele Funktionen. Für jedes $x \in M$ existiere $\underline{H}(x) := \inf\{f_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $\overline{H}(x) := \sup\{f_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $\underline{H}, \overline{H} \in \mathcal{L}(M)$.

(2) $(f_k) \subset \mathcal{L}(M)$ Folge und für jedes $x \in M$ existiere $\underline{h}(x) := \liminf\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ und $\overline{h}(x) := \limsup\limits_{k \to \infty} f_k(x)$. Dann gilt $\underline{h}, \overline{h} \in \mathcal{L}(M)$.

(3) $f, g \in \mathcal{L}(M)$. Dann sind $f \wedge g, f \vee g, f^+, f^- \in \mathcal{L}(M)$.

(4) $(f_k) \subset \mathcal{L}(M)$ Folge, (f_k) konvergiere f.ü. auf M gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R} \implies f \in \mathcal{L}(M)$

Satz 20.65

Es gilt:

(1) $f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow$ Für alle offenen/abgeschlossenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}$.

(2) Seien $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}(M)$. Dann ist $g \circ f \in \mathcal{L}(M)$

Satz 20.66

Es gilt:

(1) $\mathcal{L}(M)$ ist reeller Vektorraum

(2) $f, g \in \mathcal{L}(M) \implies f \cdot g \in \mathcal{L}(M)$

(3) $f, g \in \mathcal{L}(M)$, $g(x) \neq 0 \implies f/g \in \mathcal{L}(M)$

(4) $f \in \mathcal{L}(M)$, $p > 0 \implies |f|^p \in \mathcal{L}(M)$

Definition 20.47 Treppenfunktion

Man definiert folgendes:

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann nennt man

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

charakteristische Funktion von A. (Bemerkung: $1_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}$)

(2) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion/Tfkt $:\Leftrightarrow f(\mathbb{R}^n)$ ist endlich.

Ist f eine Treppenfunktion und $f(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, so legt man fest $A_0 := \emptyset$ und

$$A_j := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i \mid f(x) = \alpha_j\}$$

für $j = 1, \dots, m$. Dann hat f folgende Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$$

und es gilt $\mathbb{R}^n = A_1 \cup \dots \cup A_m$, daher $f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow A_1, \dots, A_m \in \mathcal{L}$

Schreibweise: $T := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{L}(M) \text{ Treppenfunktion}\}$, $T_+ := \{f \in T \mid \ f \geq 0\}$

Bemerkung

Treppenfunktionen haben folgende Eigenschaften:

(1) $A \in \mathcal{L} \implies 1_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B := B_1 \cup B_2 \in \mathcal{L} \implies 1_B = 1_{B_1} + 1_{B_2}$

Also ist die obige Darstellung einer Treppenfunktion nicht eindeutig.

Satz 20.67

Voraussetzung: $f \in \mathcal{L}(M)$, $f(x) \geq 0$ $(x \in M)$

Dann existiert eine Folge $(f_m) \subset T_+$ mit

(1) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$

(2) $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$

für alle $x \in M$.

21 Das Lebesgue-Integral

Satz 21.68

Voraussetzung: $f \in T_+$

Besitze f die Darstellungen

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 1_{A_k} = \sum_{k=1}^{l} \beta_k 1_{B_k}$$

mit $\alpha_k, \beta_k \geq 0$, $A_k, B_k \in \mathcal{L}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{l} \beta_k \lambda(B_k)$$

(Bemerkung: ∞ ist als Wert der Summe zugelassen.)

Definition 21.48 Lebesgue-Integral einer Treppenfunktion

Sei $f \in T_+$ mit der Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 1_{A_k}$$

Dann definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda(A_k) \geq 0$$

Nach Satz 21.68 ist diese Definition unabhängig von der Darstellung von f. Weiterhin ist als Wert des Integrals ∞ zugelassen.

Satz 21.69

(1) Das oben erklärte Integral ist linear und monoton.

(2) $(f_k) \subset T_+$ Folge, $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$ und (f_k) konvergiert punktweise gegen $f \in T_+$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx$$

Definition 21.49 Lebesgue-Integral (I)

Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sup\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \mid g \in T_+, g \leq f\}$$

Lebesgue-Integral von f. (Bemerkung: Diese Definition stimmt mit Definition 21.48 auf deren Gültigkeitsbereich überein)

Schreibweise:

$$\mathrm{L}^+(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid f \geq 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx < \infty\}$$

Satz 21.70

Voraussetzung: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, $(f_k) \subset T_+$ Folge mit $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ auf $\mathbb{R}^n$

Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx$$

Satz 21.71

Das in Definition 21.49 erklärte Integral ist linear und monoton.

Definition 21.50 Lebesgue-Integral (II)

Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(1) Ist f^+ oder $f^- \in \mathrm{L}^+(\mathbb{R}^n)$, so heißt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^+(x)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^-(x)dx$$

das Lebesgue-Integral von f über $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall sagt man: Das Integral existiert. (Werte $\infty, -\infty$ möglich)

(2) Sind $f^+ \in \mathrm{L}^+(\mathbb{R}^n)$, $f^- \in \mathrm{L}^+(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \in \mathbb{R}$$

und f heißt (Lebesgue-)integrierbar über $\mathbb{R}^n$

(3) Sei $M \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}(M)$. Dann definiert man

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

Dann gilt $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Falls existent, definiert man

$$\int_M f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_M(x)dx$$

f heißt (Lebesgue-)integrierbar über M $:\Leftrightarrow$

$$\int_M f(x)dx < \infty$$

Schreibweise: $\mathrm{L}(M) := \{f \in \mathcal{L}(M) \mid f \text{ integrierbar über } M\}$

Satz 21.72

Es gilt:

(1) $\mathrm{L}(M)$ ist ein reeller Vektorraum, und das Lebesgue-Integral ist linear und monoton.

(2) $f \in \mathcal{L}(M) \implies f \in \mathrm{L}(M) \Leftrightarrow |f| \in \mathrm{L}(M)$. In diesem Fall gilt

$$\left| \int_M f(x)dx \right| \leq \int_M |f(x)|dx$$

(3)

$$1_M \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow \lambda(M) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_M(x)dx$$

(4) Sei $f \in \mathrm{L}(M)$, $\sup_{x\in M} |f(x)| < \infty$. Dann gilt

$$\int_M |f(x)|dx \leq \sup_{x\in M} |f(x)| \cdot \lambda(M)$$

Satz 21.73

Voraussetzung: $M \in \mathcal{L}$, $f, g \in \mathcal{L}(M)$

Dann gilt:

(1) M Nullmenge $\implies f \in \mathrm{L}(M)$ und

$$\int\limits_M f(x)dx = 0$$

(2) Seien $A \subseteq M$, $A \in \mathcal{L}$, $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int\limits_A f(x)dx \leq \int\limits_M f(x)dx$$

(3) Seien $A \subseteq M$, $A \in \mathcal{L}$, $f \in \mathrm{L}(M)$. Dann ist $f \in \mathrm{L}(A)$.

(4) $f > 0$ auf M und $\int\limits_M f(x)dx = 0$. Dann ist M Nullmenge.

(5) Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{L}$ mit $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $f \in \mathrm{L}(M)$. Dann ist $f \in \mathrm{L}(M_1)$ und $f \in \mathrm{L}(M_2)$ und

$$\int\limits_M f(x)dx = \int\limits_{M_1} f(x)dx + \int\limits_{M_2} f(x)dx$$

(6) $f = g$ f.ü. auf $M \implies f \in \mathrm{L}(M) \Leftrightarrow g \in \mathrm{L}(M)$. Ist $f \in \mathrm{L}(M)$, so gilt auch

$$\int\limits_M f(x)dx = \int\limits_M g(x)dx$$

Sind $f, g \geq 0$, $f = g$ f.ü. auf M, so gilt

$$\int\limits_M f(x)dx = \int\limits_M g(x)dx$$

aber nicht notwendigerweise $f, g \in \mathrm{L}(M)$.

(7) $f = 0$ f.ü. auf $M \implies f \in \mathrm{L}(M)$ und

$$\int\limits_M f(x)dx = 0$$

(8) Ist $f \in \mathrm{L}(M)$ und gilt

$$(\forall A \subseteq M)(A \in \mathcal{L} \implies \int\limits_A f(x)dx = 0)$$

so ist $f = 0$ f.ü. auf M.

(9) $f \in \mathrm{L}(M)$, $f \geq 0$ und gilt

$$\int\limits_M f(x)dx = 0$$

so ist $f = 0$ f.ü. auf M.

Satz 21.74

Voraussetzung: $M \in \mathcal{L}$, $f, g \in \mathcal{L}(M)$

Dann gilt:

(1) $g \in \mathrm{L}(M)$, $g \geq 0$ auf M und $|f| \leq g$ f.ü. auf $M \implies f \in \mathrm{L}(M)$

(2) f beschränkt auf M und $\lambda(M) < \infty \implies f \in \mathrm{L}(M)$

Satz 21.75

Voraussetzung: M kompakt, $f \in \mathrm{C}(M, \mathbb{R})$

Dann ist $f \in \mathrm{L}(M)$.

22 Konvergenzsätze

Konvention für Kapitel 22

Es gelte stets $M \in \mathcal{L}$.

Satz 22.76 Satz von der monotonen Konvergenz

Voraussetzung: $f \in \mathcal{L}(M)$, $(f_k) \subseteq \mathcal{L}(M)$ Funktionenfolge mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq ...$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ f.ü. auf M

Dann gilt

$$\int\limits_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx$$

Satz 22.77 Satz von Beppo-Levi

Voraussetzung: $(f_k) \subseteq \mathrm{L}(M)$ Funktionenfolge mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$ f.ü. auf M

Ist nun die Folge

$$\left(\int\limits_M f_k(x)dx \right)_{k=1}^{\infty}$$

beschränkt, so konvergiert (f_k) f.ü. auf M gegen eine Funktion $f \in \mathrm{L}(M)$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx = \int\limits_M f(x)dx$$

Satz 22.78 Lemma von Fatou

Voraussetzung: $(f_k) \subseteq \mathcal{L}(M)$, $(\forall x \in M)(\exists \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R})$, $f_k \geq 0$ auf M

Dann gilt

$$\int\limits_M \liminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx$$

Satz 22.79 Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

Voraussetzung: $f \in \mathcal{L}(M)$, $g \in \mathrm{L}(M)$, $g \geq 0$ auf M und $(f_k) \subseteq \mathcal{L}(M)$ Funktionenfolge mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ und $|f_k| \leq g$ f.ü. auf M

Dann gilt $f, f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathrm{L}(M)$ und

$$\int\limits_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx$$

Satz 22.80

Voraussetzung: $(M_k) \subseteq \mathcal{L}$ Folge mit $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$, $M = \bigcup_k M_k$, $f \in \mathcal{L}(M) \cap \bigcap_k \mathrm{L}(M_k)$

Ist außerdem die Folge

$$\left| \int\limits_{M_k} f(x)dx \right|_{k=1}^{\infty}$$

beschränkt, so ist $f \in \mathrm{L}(M)$ und

$$\int\limits_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{M_k} f(x)dx$$

23 Riemann- und Lebesgue-Integral

Konvention für Kapitel 23

Es seien stets $n = 1$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ und

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

bezeichne das Riemann-Integral, während

$$\int_I f(x)dx$$

das Lebesgue-Integral meine. (jeweils falls existent) Es gilt $I \in \mathcal{L}$

23.1 Eigentliche Riemann-Integrale

Satz 23.81

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $z = \{x_0, \ldots, x_m\}$ Zerlegung von $[a,b]$, m_j, M_j wie in Ana I

Dann definiert man

$$g_z(x) := \begin{cases} m_1 & x = a \\ m_j & x \in (x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

$$h_z(x) := \begin{cases} M_1 & x = a \\ M_j & x \in (x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

und es gilt $g_z, h_z \in \mathrm{L}(I)$ sowie

$$\int_I g_z(x)dx = \underline{s_f}(z)$$

$$\int_I h_z(x)dx = \overline{s_f}(z)$$

Satz 23.82

Voraussetzung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $n \in \mathbb{N}$, z_n äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit $|z_n| = 1/2^n$

Sei weiterhin $g_n := g_{z_n}$, $h_n := h_{z_n}$. Dann gilt

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$, $z_1 \subseteq z_2 \subseteq z_3 \ldots$

(2) $g_1 \leq g_2 \leq \ldots f \leq \ldots \leq h_2 \leq h_1$

(3) Für $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, $h(x) := \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$ gilt $g \leq f \leq h$ auf I, $g, h \in \mathrm{L}(I)$ und

$$\int_I g(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ und } \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_I h(x)dx$$

Satz 23.83

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Dann gilt:

(1) $f \in \mathrm{R}([a, b]) \Leftrightarrow f$ ist f.ü. stetig auf $[a, b]$

(2) $f \in \mathrm{R}([a, b]) \implies f \in \mathrm{L}([a, b])$ und

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Bemerkung

$\mathrm{R}([a, b])$ ist echte Teilmenge von $\mathrm{L}([a, b])$.

23.2 Uneigentliche Riemann-Integrale

Bemerkung

O.B.d.A. behandeln wir den Fall $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Beachte: $[a, \infty) \in \mathcal{L}$

Satz 23.84

Voraussetzung: $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ Funktion, $f \in \mathrm{R}([a, t))$ $(\forall t > a)$

Dann gilt

$$\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty \Leftrightarrow f \in \mathrm{L}([a, \infty))$$

In diesem Fall gilt weiterhin

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{[a,\infty)} f(x)dx$$

Bemerkung

Man beobachtet: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ konvergiert absolut, während $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ divergiert. Das bedeutet, dass $f, g \in \mathrm{L}(M) \not\Longrightarrow f \cdot g \in \mathrm{L}(M)$.

24 Der Satz von Fubini

Konvention für Kapitel 24

Seien $k, m, p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Schreibe weiterhin $\mathcal{L}_k$ statt $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_k(M)$ statt $\mathcal{L}(M)$, $\mathrm{L}_k(M)$ statt $\mathrm{L}(M)$, $\lambda_k(M)$ statt $\lambda(M)$, $|Q|_k$ statt $|Q|$ für $Q \in R_k$.

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$, $y_0 \in \mathbb{R}^q$. Dann definiert man

$$M_{x_0} := \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x_0, y) \in M\}$$
$$M_{y_0} := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y_0) \in M\}$$

Satz 24.85

Voraussetzung: $M \in \mathcal{L}_n$

Dann sind

(1) $M_x \in \mathcal{L}_q$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$

(2) $M_y \in \mathcal{L}_p$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^q$

Bemerkung

Sei $M \in \mathcal{L}_n$. Ist nun $f = 1_M$, so ist für $y \in \mathbb{R}^q$ auch $1_{M_y}(x) = 1_M(x, y)$. Wegen $M_y \in \mathcal{L}_p$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ ergibt sich $1_{M_y} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^p)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ und damit auch

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} 1_M(x, y)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^p} 1_{M_y}(x)dx = \lambda_p(M_y)$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$.

Satz 24.86 Prinzip von Cavalieri

Voraussetzung: $M \in \mathcal{L}_n$, $\lambda_n(M) < \infty$

Dann existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^q$ und eine Funktion

$$F(y) := \begin{cases} \lambda_p(M_y) & y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0 & y \in N \end{cases}$$

so dass gilt $F \in \mathrm{L}_q(\mathbb{R}^q)$ und

$$\lambda_n(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} F(y)dy$$

Also auch:

$$\begin{aligned}\lambda_n(M) &= \int\limits_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(M_y)dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^q}\int\limits_{\mathbb{R}^p} 1_M(x,y)dxdy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^p}\int\limits_{\mathbb{R}^q} 1_M(x,y)dydx\end{aligned}$$

Beispiel Inhaltsberechnung

Damit kann man einfach errechnen:

(1) $\lambda(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r\}) = \pi r^2$

(2) $\lambda(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}) = 4/3\pi r^3$

(3) $\lambda(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq e^{-z}, z \geq 0\}) = \pi$

(4) Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$: $f \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$, $f \geq 0$ und $M := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq f^2(z)\}$ und damit

$$\lambda(M) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Satz 24.87 Satz von Fubini

Voraussetzung: $f \in \mathrm{L}_n(\mathbb{R}^n)$

Dann ex. eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^q$ mit

(1) Für alle $y \in \mathbb{R}^q$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ in $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^p)$

(2) Die Funktion

$$F(y) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx & y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0 & y \in N \end{cases}$$

ist in $\mathrm{L}_q(\mathbb{R}^q)$.

(3)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} F(y)dy$$

Bemerkung

Die Reihenfolge der Integration spielt keine Rolle.

25 Die Substitutionsregel

Satz 25.88 Substitutionsregel

Voraussetzung: $A \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathcal{L}$ und V offen, $g \in \mathrm{C}(V, \mathbb{R}^n)$ injektiv auf A und db an jeder Stelle $x \in A$, $\lambda(g(V \setminus A)) = 0$

Dann ist $g(A) \in \mathcal{L}$ und für jede Funktion $f \in \mathcal{L}(g(A))$ mit $f \geq 0$ gilt:

(1) $f \circ g \cdot |\det g'| \in \mathcal{L}(A)$

(2) Es gilt

$$\int\limits_{g(A)} f(x)dx = \int\limits_A f(g(x))|\det g'(x)|dx$$

Bemerkung

Weiterhin gilt

(1) $f \geq 0$ auf $g(A) \implies f \circ g \cdot |\det g'| \geq 0$

(2) $A = V$ ist zugelassen

(3) $f \in \mathrm{L}(g(A)) \implies f \circ g|\det g'| \in \mathrm{L}(A)$ und Teil (2) von oben gilt dann ebenfalls.

Beispiel

Einige wichtige/häufig verwendete Substitutionen sind:

(1) Polarkoordinaten: $A = V = (0, r) \times (0, 2\pi)$ und $g : V \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t, \varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi)$. Es gilt

$$g(V) = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < r^2\} \setminus \{(x, 0) \mid x \in [0, r)\}$$

$g \in \mathrm{C}^1(V, \mathbb{R}^2)$ und g ist injektiv auf V, $\det g'(t, \varphi) = t$.

(2) Zylinderkoordinaten $g : (0, r) \times (0, 2\pi) \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ $(r > 0)$

$$g(t, \varphi, z) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Sei $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, \alpha \leq z \leq \beta\}$. Es ist $\det g'(t, \varphi, z) = t$. Ist $f \in \mathrm{L}(M)$, so ist

$$\int\limits_M f(x, y, z)d(x, y, z) = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r f(t\cos\varphi, t\sin\varphi, z)t dt\, d\varphi\, dz$$

(3) Kugelkoordinaten: $g : (0, r) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ $(r > 0)$

$$g(t, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\vartheta\cos\varphi \\ t\cos\vartheta\sin\varphi \\ t\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Sei $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$.

Es ist $\det g'(t, \vartheta, \varphi) = -t^2\cos\vartheta < 0$. Ist $f \in \mathrm{L}(M)$, so gilt die zu oben analoge Integralgleichung.

26 Absolut stetige Funktionen

Konvention für Kapitel 26

Sei stets $n = 1$, also betr. wir $\mathbb{R}$.

Satz 26.89

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton

f ist db f.ü. auf $[a, b]$.

Bemerkung

Hieraus ergibt sich:

(1) Ist $f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$, so ist f f.ü. db auf $[a, b]$.

(2) Es gibt Funktionen in $\mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$, die an keiner Stelle db sind. (z.B. Koch-Kurve (?))

(3) Da monotone Funktionen messbar sind, gilt $\mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}([a, b])$. Da $f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$ auch beschränkt, gilt $\mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{L}([a, b])$.

Definition 26.51 Absolute Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig $:\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ mit

Sind $(c_1, d_1), \ldots, (c_m, d_m) \subseteq [a, b]$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j) < \delta$$

so ist

$$\sum_{j=1}^{m}(f(d_j) - f(c_j)) < \varepsilon$$

Bemerkung Geschmacksrichtungen von Stetigkeit

Es gilt folgende Implikationsreihenfolge:

Lipschitz-Stetigkeit $\implies$ absolute Stetigkeit $\implies$ gleichmäßige Stetigkeit $\implies$ Stetigkeit

Satz 26.90

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ abs. stetig

Dann ist $f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$.

Satz 26.91

Voraussetzung: $f \in \mathrm{L}([a, b])$

Für jedes $x \in [a, b]$ ist $f \in \mathrm{L}([a, x])$ und

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$$

ist absolut stetig.

Satz 26.92

Voraussetzung: $f \in \mathrm{L}([a, b])$, F wie in Satz 26.91

Dann ist $F'(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$

Bemerkung

Das bedeutet

$$\lambda(\{x \in [a, b] \mid f \text{ nicht db in } x \vee f \text{ db in } x, \text{ aber } F'(x) \neq f(x)\}) = 0$$

Satz 26.93

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R} \nearrow$

Dann ex. eine Menge $N \subseteq [a, b]$ mit $\lambda(N) = 0$ und f ist db auf $[a, b] \setminus N$, weiter gilt für

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & x \in [a, b] \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

$g \in \mathrm{R}([a, b])$ und

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Bemerkung

Es gibt wachsende (sogar stetige) Funktionen f mit $f' = 0$ f.ü. auf $[a, b]$, also auch

$$\int_a^b f'(x)dx = 0$$

aber $f(b) - f(a) > 0$.

Satz 26.94 Überdeckungssatz von Vitali

Voraussetzung: $M \subseteq \mathbb{R}$ beliebig

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von kompakten Intervallen positiver Länge mit folgender Eigenschaft:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists I \in \mathcal{M})(x \in I \wedge |I| < \varepsilon)$$

Dann ex. höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte Intervalle $I_1, I_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $\lambda(M \setminus \bigcup_m I_m) = 0$.

Ist zusätzlich $\lambda(M) < \infty$, so gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. endlich viele paarweise disjunkte $I_1, I_2, \ldots, I_p \in \mathcal{M}$ mit $\lambda(M \setminus \bigcup_{m=1}^p I_m) < \varepsilon$.

Satz 26.95

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, $f'(x) = 0$ f.ü. auf $[a, b]$

Dann ist f konstant.

Satz 26.96

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig

Dann ex. eine Nullmenge $N \subseteq [a, b]$ so, dass f auf $[a, b] \setminus N$ db ist und für die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & x \in [a, b] \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

gilt

(1) $g \in \mathrm{L}([a, b])$

(2) $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \;\; (x \in [a, b])$

Das war's — weiter geht's in Ana III :-)

A Tricks for Kicks

Trick Operatornormen bestimmen

Benutze folgende Beziehung:

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Zeige dann eine obere Abschätzung für den so gewonnenen Ausdruck und konstruiere einen Vektor, so dass der Ausdruck tatsächlich erreicht wird. Dann muss der gefundene Term Maximum, und damit Supremum, und damit die gesuchte Operatornorm sein.

Trick Abschätzen geht nicht?

Hilfe naht!

- Nutze die Äquivalenz von Normen auf endlich dimensionalen Räumen aus.
- Schätze auf jeden Fall den Betrag ab, nichts anderes!

Trick Dinge, die man nicht vergessen sollte

Zum Beispiel:

- Banach'scher Fixpunktsatz, falls gezeigt werden soll, dass eine Gleichung (genau) eine Lösung hat.

Satz A.1 Definitheit einer Matrix

Eine Matrix A ist

- positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten positiv
- negativ definit $\Leftrightarrow$ k-te Hauptunterdeterminante hat Vz $(-1)^k$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten ≥ 0
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ k-te Hauptunterdeterminante hat Vz $(-1)^k$ oder ist 0
- indefinit $\Leftarrow$ $(\exists k)(2k$-te Hauptunterdeterminante hat negatives Vz$)$

(Quelle: D. Unruh, dominique@unruh.de)

Trick Als Ungleichung gegebene Mengen

Hier ist das gleiche Verfahren (quadratische Ergänzung) angebracht, das auch bei Quadriken in LA funktioniert.

Definition A.1 σ-Algebra

Ein Tupel (X, B) mit $B \subseteq \mathcal{P}(x)$ heißt σ-Algebra $:\Leftrightarrow$

(1) $X \in B$

(2) $A \in B \implies X \setminus A \in B$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in B \implies$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in B$$

B Das Beste aus Übungen und Blättern

Definition B.1 Cantor'sche Mengen

Setze $M_0 := [0, 1]$, $M_1 := M_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $M_2 := M_1 \setminus ((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$ usw. Setze dann

$$M := \bigcap_n M_n$$

Dann kann man zeigen, dass M überabzählbar ist, aber dennoch $\lambda(M) = 0$ gilt.

Definition B.2 Vitali'sche Mengen

Definiere Äquivalenzrelation "$\sim$": $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Dann ergeben sich Äquivalenzklassen

$$K_x := \{y \mid x \sim y\} = x + \mathbb{Q}$$

Von jeder Klasse wird nun ein Vertreter $x \in (-1, 1)$ gewählt. Dann gilt für die Vitali'sche Menge

$$V := \{x \mid x \in (-1, 1) \wedge \text{ } x \text{ ist Vertreter einer Klasse}\}$$

mit $V_r := V + r$ (wobei $r \in \mathbb{Q}$)

(1) $V_r \cap V_q = \emptyset$ $(r \neq q, r, q \in \mathbb{Q})$

(2) $(-1, 1) \subseteq \bigcap_{|r|<2} V_r$

(3) $\bigcap_{|r|<2} V_r \subseteq (-3, 3)$

(4) $\lambda(V_r) = \lambda(V)$

(5) Es ergibt sich, dass die σ-Additivität für V nicht gilt.

Satz B.1

Voraussetzung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in \mathcal{L}(M)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dann gilt

(1) $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies g \circ f \in \mathcal{L}(M)$

(2) g monoton $\implies g \circ f \in \mathcal{L}(M)$

C GNU Free Documentation License

title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five). C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document’s license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section entitled ”History”, and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled ”History” in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the ”History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. In any section entitled ”Acknowledgements” or ”Dedications”, preserve the section’s title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section entitled ”Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section as ”Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled ”Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

Index

Sätze und Definitionen

A

B

C

D

P

Q

R

S

T

U

V

W

Z