Analysis III

Ein Aufschrieb der Vorlesung *Analysis III* an der Uni Karlsruhe im Wintersemester 1999/00, gelesen von Priv.-Doz. Dr. G. Herzog.

GeTEXt von Andreas Klöckner (ak@ixion.net). Für Kommentare und Berichtigungen bin ich jederzeit dankbar. Neue Versionen gibt es unter http://www.ixion.net/ak/aufschrieb.

LATEX-Lauf am 23. Februar 2006. "Nach der Klausur"-Edition, so wenige Fehler wie noch nie!

Inhaltsverzeichnis

1 Integralsätze

Beispiel

Sei z.B. $f \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Dann gilt

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)dx$$

Ziel ist es, dieses eindimensionale Ergebnis ins mehrdimensionale zu übertragen.

Konvention für Kapitel 1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(D,\mathbb{R}^p)$, $f = (f_1,\ldots,f_p)$.

Definition 1.1 Divergenz

Für eine Funktion $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^p)$ wird die Divergenz $\operatorname{div} f$ wie folgt festgelegt:

$$\operatorname{div} f := D_1 f_1 + \ldots + D_p f_p$$

Definition 1.2 Rotation

Für eine Funktion $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^3)$ wird die Rotation $\operatorname{rot} f$ wie folgt festgelegt:

$$\operatorname{rot} f := \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_3 f_1 - D_1 f_3 \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}$$

1.1 Der zweidimensionale Integralsatz von Gauß

Definition 1.3 Zulässigkeit

Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest und $R : [0,2\pi] \to (0,\infty)$ stückweise stetig db mit $R(0) = R(2\pi)$. Der Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 + R(t)\cos t \\ y_0 + R(t)\sin t \end{pmatrix}$$

Dann ist γ stückweise stetig db mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Weiter sei

$$B := \{(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \mid t \in [0,2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

Es gilt: B ist kompakt und $\partial B = \Gamma$.

Eine Menge B, die auf diese Art und Weise erzeugt werden kann, heißt zulässig. Zulässig sind z.B. Kreise, Ellipsen, konvexe Vielecke. Sei $(x,y) = \gamma(t) \in \partial B$ mit geeignetem $t \in [0, 2\pi]$. Dann lässt sich die äußere Normale von B folgendermassen darstellen:

$$n(x,y) := \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\|(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))\|}$$

(es gilt stets $\|(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))\| \neq 0$).

Satz 1.1 Integralsatz von Gauß in der Ebene

Voraussetzung: $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zulässig, $U \supseteq B$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$

Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} f(x,y) d(x,y) = \underbrace{\int_{\partial B} f(x,y) \cdot n(x,y) ds}_{\text{Wegintegral}}$$

Bemerkung

Satz 1.1 gilt allgemeiner für Bereiche B, deren Rand durch einen rektifizierbaren Weg im math. pos Sinn einmal umlaufen werden kann.

Bemerkung Berechnung von Flächeninhalten

Sei $\gamma \in \mathrm{C}^1$ eine Parametrisierung von ∂B mit $\|\gamma'\| \equiv 1$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned}
\lambda(B) &= \int_B 1\, d(x,y) = \frac{1}{2} \int_B \mathrm{id}_x(x,y) + \mathrm{id}_y(x,y) d(x,y) \\
&= \frac{1}{2} \int_B \operatorname{div} \mathrm{id}(x,y) d(x,y) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot n(x,y) d(x,y) \\
&= \frac{1}{2} \int_\gamma \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_\gamma \begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix} \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial B} x\, dy - y\, dx
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\lambda(B) = \int_{\partial B} x\, dy = -\int_{\partial B} y\, dx$$

Den Flächeninhalt der Ellipse mit Randweg

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

erhält man so einfach zu $ab\pi$.

1.2 Flächen im $\mathbb{R}^3$

Definition 1.4 Parameterdarstellung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $K \subseteq D$ kompakt und $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ und $\operatorname{rank} \Phi' = 2$ auf D. Dann heißt Φ Parameterdarstellung der glatten Fläche $\mathcal{F} := \Phi(D)$ und $\Phi|_K$ Parameterdarstellung des glatten Flächenstücks $\mathcal{F}_K := \Phi(K)$.

Es gilt:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} D_1\Phi_1 & D_2\Phi_1 \\ D_1\Phi_2 & D_2\Phi_2 \\ D_1\Phi_3 & D_2\Phi_3 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren von Φ' sind linear unabhängig und bestimmen die Tangentialebene

$$(u, v, w) = \Phi(x_0, y_0) + [\Phi_x(x_0, y_0), \Phi_y(x_0, y_0)]$$

im Punkt $\Phi(x_0, y_0)$. Senkrecht auf dieser Ebene steht der Normalenvektor

$$n(x_0, y_0) := \frac{\Phi_x(x_0, y_0) \times \Phi_y(x_0, y_0)}{\|\Phi_x(x_0, y_0) \times \Phi_y(x_0, y_0)\|}$$

Bemerkung Wichtiger Spezialfall

$\varphi \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}), ((x, y) \in D), \Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$. Hier ist

$$\Phi_x(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x(x, y) \end{pmatrix} \qquad \Phi_y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y(x, y) \end{pmatrix}$$

und damit $n = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)}{\sqrt{1 + (\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2}}$ (n zeigt nach oben).

Definition 1.5 Flächeninhalt

Ist $\mathcal{F}_k$ ein glattes Flächenstück, so ist dessen Flächeninhalt definiert als

$$I(\mathcal{F}_K) := \int_K \|\Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y)\| d(x, y)$$

1.3 Der Integralsatz von Stokes

Definition 1.6

Sei Φ_K Parameterdarstellung eines glatten Flächenstücks, $f \in \mathrm{C}(\mathcal{F}_K, \mathbb{R})$ so definiert man

$$\int_{\Phi|_K} f \, do := \int_K f(\Phi(x, y)) \|\Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y)\| d(x, y)$$

Dieses Integral bleibt bei geeigneter Umparametrisierung erhalten, daher schreibt man auch

$$\int_{\mathcal{F}_K} f\,do := \int_{\Phi|_K} f\,do$$

Für Flächen, die aus glatten Flächenstücken zusammengesetzt sind, definiert man die entsprechenden Integrale als Summe der Integrale der einzelnen Flächenstücke.

Satz 1.2 Integralsatz von Stokes

Voraussetzung: $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und zulässig, $U \supseteq B$ offen, $\Phi \in \mathrm{C}(U, \mathbb{R}^3)$ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ Parameterisierung von ∂B, $A \supseteq \Phi(B)$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(A, \mathbb{R}^3)$

Sei $\mathcal{F}_B = \Phi(B)$. Dann ist $\Phi \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ Parametrisierung von $\partial\mathcal{F}_B$ und es gilt:

$$\int_{\Phi|_B} \operatorname{rot} f \cdot n\,do = \int_{\Phi\circ\gamma} f(x,y,z)d(x,y,z)$$

1.4 Der Integralsatz von Gauß im Raum

Definition 1.7 Normalbereich

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und zulässig, $U \supseteq B$ offen, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ glatt und Parametrisierung von ∂B, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$. Es sei $\varphi_1 < \varphi_2$ auf B. Weiter sei

$$\Phi_i(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_i(x,y) \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2)$$

Dann heißt die Menge

$$V := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B, z \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$

ein Normalbereich bezüglich der z-Achse. (Definition bezüglich x,y-Achsen analog) Die Mantelfläche $\mathcal{M}$ von V hat die Parametrisierung

$$\Phi_3(t,z) = (\gamma(t), z) \qquad (a \le t \le b, \varphi_1(\gamma(t)) \le z \le \varphi_2(\gamma(t)))$$

Wir nennen den ins Äußere von V zeigenden Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, n_2, n_3)$ auf ∂V die äußere Normale und erhalten

$$n = \frac{(\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, -1)}{\|(\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, -1)\|} \qquad \text{auf } \mathcal{F}_1$$

$$n = \frac{(-\varphi_{2x}, -\varphi_{2y}, 1)}{\|(-\varphi_{2x}, -\varphi_{2y}, 1)\|} \qquad \text{auf } \mathcal{F}_2$$

$$n = \frac{(\gamma_2', -\gamma_1', 0)}{\|(\gamma_2', -\gamma_1', 0)\|} \qquad \text{auf } \mathcal{M}$$

Satz 1.3 Integralsatz von Gauß im Raum

Voraussetzung: V Normalbereich bzgl. aller drei Achsen, $U \supseteq V$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$

Dann gilt

$$\int\limits_V \operatorname{div} f(x,y,z) d(x,y,z) = \int\limits_{\partial V} f \cdot n \, do$$

Bemerkung

Durch Approximationsargumente kann Satz 1.3 auf Kugeln, Ellipsoide u.v.a. Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ erweitert werden.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Konvention für Kapitel 2

I sei ein Intervall positiver Länge.

Definition 2.8 Gewöhnliche Differentialgleichung

Sei $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$, $D \subseteq \mathbb{R}^{(k+1)p+1}$, $F : D \to \mathbb{R}^p$. Eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)) = 0 \qquad (*)$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung/Dgl. Sei I ein Intervall, $y : I \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. y heißt Lösung von $(*)$ auf I, falls gilt:

(1) y ist auf I k-mal db

(2) $(x, y(x), \ldots, y^{(k)}) \in D)$ für alle $x \in I$.

(3) $(*)$ ist erfüllt.

Lösungen über verschiedenen Intervallen werden als verschieden angesehen, selbst wenn sie in y übereinstimmen.

Beispiel

Hier einige Differentialgleichungen mit Lösung:

- $y^2(x) + (y'(x))^2 = 1 \to y(x) = \cos x$

- $x + y(x)/y'(x) = 0 \to y : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $y(x) = c/x$
- $f \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$, $y'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = f(x)$

Definition 2.9 Explizite Differentialgleichung

Hat $(*)$ die Form

$$y^{(k)} = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$$

so spricht man von einer expliziten Dgl k-ter Ordnung.

Bemerkung

Ist $y : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung einer expliziten Dgl mit stetigem F, so ist $y \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$. In dieser Vorlesung werden vorwiegend solche Dgl'en betrachtet.

Definition 2.10 Anfangswertproblem

Sei nun weiterhin $(x_0, y_0, \ldots, y_{k-1}) \in D$, so heißt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) && (***) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 && (**) \\ &\vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) &= y_{k-1} \end{aligned}$$

ein Anfangswertproblem/AWP. Eine Lösung des AWP ist eine Lösung der Dgl $(***)$ und der Gleichungen $(**)$.

Beispiel

Hier einige Anfangswertprobleme mit Lösung:

(1) $y'(x) = 2y(x)$ mit $y(0) = 4 \to y(x) = 4e^{2x}$

(2) $y'(x) = 2\sqrt{2y(x)}$, $y(0) = 0 \to y(x) \in \{\max\{0, x - a\} \mid a > 0\}$

Definition 2.11 Eindeutigkeit einer Lösung

Ein AWP $(**)$ heißt eindeutig lösbar, falls gilt

(1) Es existiert eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$

(2) Sind $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^p$, $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^p$ Lösungen, so gilt $y_1 = y_2$ auf $I_1 \cap I_2$

Bemerkung Bezeichnungsweisen in der Literatur

Die Variablenbezeichnungen von Dgl'en sind in der Literatur nicht einheitlich.

3 Explizit lösbare Differentialgleichungen

Konvention für Kapitel 3

Wir betrachten stets $\mathbb{R}$, also $p = 1$.

Definition 3.12 Lineare Differentialgleichung (I)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, g \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + g(x)$$

heißt linear. Sie heißt außerdem homogen, falls $g = 0$, ansonsten inhomogen.

3.1 Homogene lineare Dgl'en

Hilfssatz

Voraussetzung: $y'(x) = a(x)y(x)$ Dgl, $a \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$, $A : J \to \mathbb{R}$, $A' = a$, $y : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq J)$ Lösung

Für $x \in I$ gilt

$$e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = 0 \implies \frac{d}{dx}(e^{-A}y)(x) = 0$$

d.h. der letzte Term ist konstant, also gilt für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $y(x) = ce^{A(x)}$.

Bemerkung

Ist also in diesem Fall $y(x) = 0$ für ein $x \in J$, so gilt $y = 0$.

3.2 Inhomogene lineare Dgl'en

Hilfssatz

Voraussetzung: $y'(x) = a(x)y(x) + g(x)$ Dgl, $a, g \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$, $A : J \to \mathbb{R}$, $A' = a$

Mit dem Ansatz $y(x) = e^{A(x)}c(x)$ soll nun $c(x)$ so bestimmt werden, dass y Lösung der Dgl wird.

$$\begin{aligned} y'(x) &= c(x)a(x)e^{A(x)} + c'(x)e^{A(x)} \\ &\overset{!}{=} c(x)a(x)e^{A(x)} + g(x) \\ &\Leftrightarrow c'(x) = e^{-A(x)}g(x) \end{aligned}$$

Wähle $x_0 \in J$ fest und setze

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} g(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} g(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi \\ &= \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} a(\eta) d\eta} g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Sind nun $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq J)$ Lösungen der inhomogenen Gleichung, so ist $y := y_1 - y_2$ Lösung der zugeh. homogenen Gleichung. Umgekehrt kann man auf diese Art und Weise auch aus einer inh. und einer hom. Lösung eine weitere inh. Lösung erzeugen.

3.3 Lineare AWPe

Satz 3.4

Voraussetzung: $J \subseteq$ Intervall, $x_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y'(x) = a(x)y(x) + g(x)$, $y(x_0) = y_0$ AWP mit $a, g \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$

Dann sind genau die Funktionen

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} a(\eta) d\eta} g(\xi) d\xi + y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$$

Lösung des AWP auf J.

3.4 Dgl'en mit getrennten Veränderlichen

Definition 3.13 Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Seien J_1, J_2 Intervalle, $g \in \mathrm{C}(J_1, \mathbb{R})$, $f \in \mathrm{C}(J_2, \mathbb{R})$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = g(x) f(y(x))$$

heißt Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Im Spezialfall $g \equiv 1$ heißt die Dgl. autonom.

Bemerkung Eine spezielle Lösung

Seien $(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$. Ist $f(y_0) = 0$, so ist $y : J_1 \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = y_0$ eine Lösung der obigen Dgl, oft sind aber noch weitere Lösungen vorhanden.

Satz 3.5

Voraussetzung: J_1, J_2 Intervalle, $g \in \mathrm{C}(J_1, \mathbb{R})$, $f \in \mathrm{C}(J_2, \mathbb{R})$. $(x_0, y_0) \in {J_1}^\circ \times {J_2}^\circ$, $f(y_0) \neq 0$

Ist $y : I \to \mathbb{R}$ Lösung der Dgl $y'(x) = g(x)f(y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ und $f(y(x)) \neq 0$ $(x \in I)$, so gilt:

Für jedes $x \in I$ besitzt f keine Nullstellen zwischen $y_0 = y(x_0)$ und $y(x)$, und damit

$$\int\limits_{x_0}^{x} g(\xi) d\xi = \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(\eta)} d\eta \qquad (x \in I)$$

denn es ist (abgelitten)

$$g(x) = \frac{y'(x)}{f(y(x))} \tag{$*$}$$

Somit ist $z \mapsto \int\limits_{y_0}^{y(z)} 1/f(\eta)d\eta$ streng monoton, also umkehrbar, $(*)$ kann also nach y aufgelöst werden. Insgesamt gilt:

Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für $I := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt:

(1) Das AWP $y'(x) = g(x)f(y(x)), y(x_0) = y_0$ hat eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $f(y(x)) \neq 0$ $(x \in I)$

(2) Sind $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ Lösungen, so stimmen diese punktweise auf $I_1 \cap I_2$ überein.

Bemerkung Zum Autonomen Fall

Sei $f \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$. Betrachte $y'(x) = f(y(x))$ Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung, so ist $y_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_a(x) := y(x + a)$ und $a \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung auf $\mathbb{R}$.

Satz 3.6

Voraussetzung: $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$, $y : I \to \mathbb{R}$ Lösung von $y'(x) = f(y(x))$

Dann ist y monoton auf I.

4 Einige Substitutionen

Hilfssatz Nützliche Substitutionen

Für die folgenden Dgl'en von spezieller Gestalt existieren Tricks:

(1) Die Homogene Differentialgleichung (Vorsicht: Homogene Dgl $\neq$ homogene lineare Dgl)

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

Substituiere $u(x) = y(x)/x$. Dann ist $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ (Bew: Definition von u ableiten, auflösen) Dann ergibt sich (einsetzen in Dgl)

$$u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}$$

also eine Dgl mit getrennten Veränderlichen.

(2) Betrachte

$$y'(x) = f(ax + by(x))$$

Setze $u(x) := ax + by(x)$. Dann ist $u'(x) = a + bf(u(x))$ (linear)

(3) Die Bernoulli'sche Dgl

$$y'(x) = g(x)y(x) + h(x)y^{\alpha}(x) \qquad \alpha \neq 1$$

Setze $u(x) := y^{1-\alpha}(x)$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) \\ &= (1-\alpha)\left[g(x)y^{1-\alpha}(x) + h(x)\right] \\ &= (1-\alpha)g(x)u(x) + (1-\alpha)h(x) \end{aligned}$$

also eine lineare Dgl in u.

(4) Die Riccati'sche Differentialgleichung

$$y'(x) = k(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x)$$

Sind $y, \tilde{y}$ Lösungen dieser Dgl, so genügt $u = y - \tilde{y}$ einer Bernoulli'schen Dgl mit $\alpha = 2$, nämlich

$$u'(x) = [g(x) + 2\tilde{y}(x)h(x)]\, u(x) + h(x)u^2(x)$$

die mit $v := 1/u$ in eine lineare Dgl überführt werden kann. Kennt man also eine Lösung $\tilde{y}$ der Riccati'schen Dgl, so können weitere Lösungen durch Lösen einer linearen Dgl berechnet werden.

Bemerkung

Bis jetzt ist kein "Rechenverfahren" bekannt, das eine ausreichend große Kategorie von Dgl'en löst.

5 Ein Eindeutigkeitssatz

Satz 5.7

Voraussetzung: $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in J$, $a, g, v \in \mathrm{C}(J, \mathbb{R})$, v db auf J° mit $v'(x) \leq a(x)v(x) + g(x)$ für $x \in J^\circ$

Dann gilt für $x \in J$

$$y(x) \underset{\geq}{\leq} v(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} a(\eta)d\eta} g(\xi)d\xi \qquad \begin{matrix} \text{für } x \geq x_0 \\ \text{für } x \leq x_0 \end{matrix}$$

Definition 5.14 Lokale Lipschitz-Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^p$. Dann heißt f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y, falls gilt:

$$\begin{aligned} &(\forall (x_0, y_0) \in D)(\exists L, \delta > 0)(\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D) \\ &\quad (|x - x_0|, \|y - y_0\|, \|\tilde{y} - y_0\| < \delta \implies \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|) \end{aligned}$$

Bemerkung

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Norm, nicht jedoch die Größe von L und δ.

Satz 5.8

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. y

Seien $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^p$, $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^p$ Lösungen von

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = y_0$$

so stimmen y_1 und y_2 auf $I_1 \cap I_2$ punktweise überein.

Bemerkung

Für Eindeutigkeit nach rechts ($x \geq x_0$) genügt eine lokale Bedingung, nämlich

$$(y - \tilde{y})(f(x, y) - f(x, \tilde{y})) \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

Bemerkung Ableitung der Euklidnorm

Sei $\|\cdot\|$ die Euklidnorm. Dann gilt $\|\cdot\| \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Sei nun $u : I \to \mathbb{R}^p$ db auf I. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}\|u(x)\| = \frac{1}{\|u(x)\|} u(x)u'(x)$$

Bemerkung

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R})$ und partiell stetig differenzierbar nach y. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.

6 Der Satz von Picard-Lindelöf

Definition 6.15 Lipschitz-Stetigkeit

Sei $D = [a, b] \times \mathbb{R}^p$ (man nennt D dann einen Streifen), $f : D \to \mathbb{R}^p$. Weiter existiere ein $L > 0$ so, dass

$$(\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D)(\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|)$$

Dann nennt man f Lipschitz-stetig bzgl. y auf D.

Bemerkung

Vorsicht! Die Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y impliziert nicht die Stetigkeit einer Funktion.

Satz 6.9 Satz von Picard-Lindelöf

Voraussetzung: $D = [a, b] \times \mathbb{R}^p$ ein Streifen, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$ Lipschitz-stetig bzgl. y, $(x_0, y_0) \in D$

Dann ist das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar.

Weiterhin konvergiert jede Folge "sukzessiver Approximationen", gegeben durch ein $z_0 \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}^p)$ beliebig und die Rekursionsformel

$$z'_{n+1} := f(x, z_n(x)) \qquad z_{n+1}(x_0) = y_0$$

$(n \in \mathbb{N}_0)$ gleichmäßig gegen diese eine Lösung.

Definition 6.16 Lineare Differentialgleichung (II)

Sei $A \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}^{p \times p})$, $g \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}^p)$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^p$ definiert durch $f(x, y) = A(x)y(x) + g(x)$ und $(x_0, y_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^p$.

Das zugehörige AWP

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x) \qquad y(x_0) = y_0$$

heißt linear und die Dgl heißt homogen, falls $g = 0$, ansonsten inhomogen.

Sei $|||\cdot|||$ eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{p \times p}$ mit $\|By\| \leq |||B|||\,\|y\|$. Es ist $f \in \mathrm{C}([a, b] \times \mathbb{R}^p)$, und da A stetig auf $[a, b]$, ist auch $x \mapsto |||A(x)|||$ stetig auf $[a, b]$, somit beschränkt, somit Lipschitz-stetig. Damit ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit des AWP.

7 Der Existenzsatz von Peano

Satz 7.10 Existenzsatz von Peano

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ beschränkt

Dann besitzt das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ mit $(x_0, y_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p$ eine Lösung auf $[a,b]$.

Definition 7.17 Gleichgradige Stetigkeit

$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ heißt gleichgradig stetig :⇔

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, \tilde{x} \in [a,b])(\forall \varphi \in \mathcal{F})(|x - \tilde{x}| < \delta \implies \|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\| < \varepsilon)$$

Bemerkung

Es gilt:

- Gleichgradige Stetigkeit ist eine Eigenschaft von Funktionenmengen, nicht von Funktionen.
- Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R}^p)$ und ex. ein $c > 0$ so, dass jede Funktion $\varphi \in \mathcal{F}$ Lipschitz-stetig mit der Konstanten c ist, so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

Satz 7.11 Satz von Ascoli-Arcelà

Voraussetzung: $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R}^p)$ gleichgradig stetig, ex. $k > 0$ mit $(\forall \varphi \in \mathcal{F})(\forall x \in [a,b])(\|\varphi(x)\| \leq k)$

Dann besitzt jede Folge $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine glm. konvergente Teilfolge.

Bemerkung

Satz 7.11 ist ein Kompaktheitskriterium im Raum $\mathrm{C}([a,b], \mathbb{R}^p)$, versehen mit der Maximumsnorm.

Genauer gilt: $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R}^p)$ kompakt ⇔ $\mathcal{F}$ ist beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig.

Bemerkung Eine Abschätzung

Ist $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ beschränkt durch M und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösung des AWP $y'(x) = f(x, y(x))$, so gilt offensichtlich:

$$\|y(x) - y_0\| \leq M|x - x_0|$$

Bemerkung AWPe auf Rechtecken

Sei $c > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $D := [a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$. Betrachte das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$. Weil D kompakt und f stetig ist, existiert $M := \max\limits_{D} f(x,y)$. Definiere eine neue Funktion

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x, y_0 + c) & (x,y) \in [a,b] \times (y_0 + c, \infty) \\ f(x,y) & (x,y) \in [a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c] \\ f(x, y_0 - c) & (x,y) \in [a,b] \times (-\infty, y_0 - c) \end{cases}$$

Wegen des Satzes von Peano ist das AWP $y'(x) = \tilde{f}(x, y(x)), y(a) = y_0$ lösbar, und eine Lösung von y lässt sich auf $[a, \min\{a, a + \frac{c}{M}\}]$ auf $y'(x) = f(x, y(x))$ übertragen.

Eine analoge Überlegung lässt sich für die Gültigkeit von Satz 6.9 anstellen.

8 Nicht fortsetzbare Lösungen

Definition 8.18 Nicht fortsetzbare Lösung

Sei $D := \mathbb{R}^{p+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^p$, $(x_0, y_0) \in D$. Eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$ des AWP $y'(x) = f(x, y(x))$ heißt nicht fortsetzbar, wenn es keine Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ mit $J \underset{\neq}{\supset} I$ und $y = \tilde{y}$ auf I gibt.

Auf naheliegende analoge Weise werden definiert: Nicht nach rechts/links fortsetzbar.

Satz 8.12

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^p$, $(x_0, y_0) \in D$, $u : I \to \mathbb{R}^p$ Lösung von $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$

Dann gibt es eine nicht fortsetzbare Lösung dieses AWP.

Satz 8.13

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ offen, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$, $(x_0, y_0) \in D$

Dann besitzt das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$ mit $x_0 \in I^\circ$.

Bemerkung

Dazu folgende Bemerkungen:

- Satz 8.13 ist im Grunde eine Erweiterung des Satzes von Peano auf beliebige offene Teilmengen des $\mathbb{R}^p$, wobei jetzt nicht mehr wie vormals ein Existenzintervall garantiert wird, sondern lediglich die Existenz einer Lösung auf irgendeinem Intervall gefolgert werden kann.
- Unter den Voraussetzungen von Satz 8.13 gibt es zu jeder Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$ eine nicht fortsetzbare Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ mit $J \supseteq I$, $\tilde{y}|_I = y$. Da D offen ist, ist J offen, also von der Form (ω_-, ω_+), wobei $\omega_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. J muss offen sein, da man sonst nach Satz 8.13 in die Richtung der Abgeschlossenheit fortsetzen könnte.
- Ist das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ in obigem Satz eindeutig lösbar, so gibt es genau eine nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$. Diese Lösung bezeichnet man dann als *die* Lösung des AWP. (Analog: *die* Lösung nach rechts/links).
- Unter den Voraussetzungen von Satz 8.13 ist z.B. eine Lösung $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ nach rechts fortsetzbar $\Leftrightarrow$ es ex. keine kompakte Menge $K \subseteq D$ mit $\{(x, y(x)) \mid x \in [x_0, \omega_+)\} \subseteq K$.

9 Beispiele

Bemerkung Die logistische Gleichung

Seien $a, b > 0$. Durch

$$y'(x) = ay(x) - by^2(x), y(0) = y_0 \geq 0 \qquad (*)$$

ist eine Differentialgleichung gegeben. Nach Satz 5.8, Satz 7.10 und Satz 8.12 besitzt das AWP $(*)$ eine eindeutig bestimmte nicht fortsetzbare Lösung:

- Bei entsprechendem y_0 sind Lösungen: $y = 0, y = \frac{a}{b}$.
- Sei nun $y_0 \notin \{0, \frac{a}{b}\}$. Mit der Methode für Dgl'en mit getrennten Veränderlichen erhält man:

  $$y(x) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-ax}}$$

  Falls $0 < y_0 < \frac{a}{b}$ ergibt sich als Lösungsintervall $(\omega_-, \omega_+) = (-\infty, \infty)$. Ansonsten, also mit $\frac{a}{b} < y_0$ ergibt sich

  $$(\omega_-, \omega_+) = (\frac{1}{a} \log 1 - \frac{a}{by_0}, \infty)$$

Bemerkung

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \sin \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}$$

Das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = 0$ ist, da f stetig und lokal Lipschitz-stetig ist, auf D eindeutig lösbar. Sei $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ Lösung des AWP. Dann gelten:

- $\omega_- = -\omega_+$. Es ergibt sich weiterhin, dass jede Lösung der Dgl punktsymmetrisch zum Ursrpung ist.
- $\omega_+ \geq 1/\sqrt{2}$

Bemerkung

Betrachte

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) + e^{-x} y_1^2(x) \qquad & y_1(0) &= 0 \\ y_2'(x) &= y_2(x) & y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Das AWP besitzt eine eindeutige Lösung, sie ist

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x \tan x \\ e^x \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bemerkung

Sei $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, beschränkt und $y : I \to \mathbb{R}$ eine nicht fortsetzbare Lösung des AWP's $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$. Dann ist $I = [a, b]$, insbesondere hat also jede Lösung des AWP's eine Fortsetzung auf $[a, b]$.

10 Lineare Systeme von Dgl'en

Definition 10.19 Lineares System

Sei nun stets $A \in C([a, b], \mathbb{R}^{p \times p})$. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x) \tag{L}$$

mit einem $g \in C([a, b], \mathbb{R}^p)$ heißt lineare Dgl im $\mathbb{R}^p$, bzw. lineares System von p Dgl'en. Die Dgl.

$$y'(x) = A(x)y(x) \tag{H}$$

heißt zugehörige homogene Gleichung, während (L) wie im Fall $p = 1$ inhomogen heißt.

Gelegentlich wird o.B.d.A. auch der Fall $I \subseteq \mathbb{R}$ statt $I = [a, b]$ betrachtet.

Bemerkung Lösbarkeit von linearen Systemen

Nach Definition sind alle linearen AWPe eindeutig mit einer nicht fortsetzbaren Lösung lösbar. Weiterhin ist jede Lösung $y : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ der Dgl von der Form $y \equiv y_h + y_s$, dabei ist y_h die Lösung des homogenen Problems $y'(x) = A(x)y(x), y(x_0) = 0$ und y_s die Lösung des inhomogenen Problems $y'(x) = A(x)y(x), y(x_0) = y_0$.

Bemerkung Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Seien $y_1, \dots, y_k \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$ und $x \in [a, b]$ beliebig. Dann gilt

$$y_1, \dots, y_k \text{ linear unabhängig} \underset{\Leftarrow}{\overset{\not\Longrightarrow}{}} y_1(x), \dots, y_k(x) \text{ linear unabhängig}$$

Satz 10.14

Sei $V := \{y \in \mathrm{C}^1([a, b], \mathbb{R}^p) \mid y \text{ löst } (H)\}$. Dann gilt: V ist ein Vektorraum mit $\dim V = p$.

10.1 Fundamentalsysteme

Definition 10.20 Fundamentalsystem

Jede Basis des Lösungsraumes V eines homogenen linearen Systems (H) heißt ein Fundamentalsystem/FS von (H). Ist nun $\{y_1, \dots, y_p\}$ ein Fundamentalsystem von (H), so fasst man diese Funktionen zu einer Matrixfunktion $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ zusammen durch

$$Y(x) := \big(y_1(x)| \dots |y_p(x)\big)$$

Diese Funktion heißt dann Fundamentalmatrix von (H).

Bemerkung Lösungen und Linearität

Gilt $Y(x_0) = I$, so ist $y(x) = Y(x)y(x_0) = Y(x)y_0$ Lösung des linearen Systems (H). Ist weiterhin eine Lösung $y_s : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ als Lösung von (L) mit $y_s(x_0) = 0$ bekannt, so ist die Lösung des AWPs $y'(x) = A(x)y(x) + g(x), y(x_0) = y_0$ die Funktion $y(x) = Y(x)y_0 + y_s(x)$.

Eine Fundamentalmatrix $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ von (H) kann auch aufgefasst werden als Lösung der Matrixgleichung $Y'(x) = A(x)Y(x)$

Satz 10.15

Voraussetzung: V Lösungsraum von (H), $y_1, \dots, y_k \in V$

Dann gilt

$$y_1, \dots, y_k \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow$$
$$(\forall x \in [a,b])(y_1(x), \dots, y_k(x) \text{ linear unabhängig})$$

Insbesondere gilt: Ist $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ ein Fundamentalsystem von (H), so ist $\det Y(x) \neq 0$. Hierbei ist " $\Longrightarrow$ " die interessante Richtung, die andere ist trivial.

Bemerkung Lösung von (L) durch Variation der Konstanten

Ist zu einer Gleichung (H) ein FS $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ bekannt, so führt der Ansatz $y_s(x) = Y(x)c(x)$ (Variation der Konstanten) für eine Lösung von (L) auf

$$y_s'(x) = \underbrace{Y'(x)}_{A(x)Y(x)} c(x) + Y(x)c'(x) \overset{!}{=} A(x)Y(x)c(x) + g(x)$$
$$\Leftrightarrow Y(x)c'(x) = g(x) \Leftrightarrow c'(x) = Y^{-1}(x)g(x)$$

Setzt man also [1]

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi)g(\xi)d\xi \qquad (x_0 \in [a,b] \text{ fest})$$

dann ist $y^*(x) := Y(x)c(x)$ die Lösung des AWP's $y'(x) = A(x)Y(x) + g(x), y(x_0) = y_0$. Ist $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ irgendein Fundamentalsystem, so sind die Lösungen einer Gleichung der Art (L) genau die Funktionen

$$y(x) = Y(x)c + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi)g(\xi)d\xi \qquad c \in \mathbb{R}^p$$

10.2 Die Wronski-Determinante

Definition 10.21 Wronski-Determinante

Sind $y_1, \dots, y_p$ p Lösungen von (H) (nicht notwendigerweise l.u.), so nennt man $\Phi(x) := \det(y_1|\dots|y_p)(x)$ ihre Wronski-Determinante.

Bemerkung Eigenschaften der Wronski-Determinante

Da p Lösungen von (H) genau dann l.u. sind, wenn $y_1(x), \dots, y_p(x)$ für alle $x \in [a,b]$ l.u. sind, gilt entweder $\Phi(x) = 0$ oder $\Phi(x) \neq 0$, jeweils für $x \in [a,b]$.

[1] hier koordinatenweise integrieren

Weiterhin ist $\Phi(x)$ differenzierbar und es gilt für $x \in [a,b]$

$$\Phi'(x) = (\operatorname{Spur} A(x)) \cdot \Phi(x)$$

10.3 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert

Hilfssatz Reduktionsverfahren von d'Alembert

Voraussetzung: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösung von $y'(x) = A(x)y(x)$,$j \in \{1, \ldots, p\}$ beliebig gewählt

Dann erhält man mit dem Ansatz $z(x) := h(x)y(x) + g(x)$, h reellwertig (unbekannt), $g \cdot e_j = 0$:

$$z'(x) = h'(x) \cdot y(x) + \underbrace{h(x)y'(x)}_{h(x)A(x)y(x)} + g'(x) \overset{!}{=} A(x)h(x)y(x) + A(x)g(x)$$

$$\Leftrightarrow h'(x)y(x) + g'(x) = A(x)g(x)$$

Ist nun $y \cdot e_j \neq 0$ auf einem Intervall $I \subseteq [a,b]$, so erhält man wegen $g \cdot e_j = 0$ ein lineares Dgl.system mit $p-1$ Gleichungen für alle Komponentenfunktionen von g außer der j-ten, in welchem ebendiese j-te Koordinate durch h ersetzt werden kann.

Beispiel Reduktionsverfahren von d'Alembert

Betrachte $A : (0,\infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \text{ und } y_1(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

$y_1(x)$ ist Lösung von $y'(x) = A(x)y(x)$ und z.B. durch einen Polynomansatz zu ermitteln. Ziel: Gewinnung einer weiteren, linear unabhängigen Lösung. Wähle $j := 1$ für die Reduktion. Ansatz:

$$y_2(x) = h(x)y_1(x) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix}}_{g(x):=}$$

$$\underset{\text{oben}}{\Longrightarrow} h'(x)\begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h'(x)x^2 = -\eta(x) \\ h'(x)x + \eta'(x) = \dfrac{2}{x}\eta(x) \end{cases} \Longrightarrow h'(x) = -\frac{\eta(x)}{x^2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\eta(x)}{x^2}'(x)x + \eta'(x) = \frac{2}{x}\eta(x)$$

$$\Leftrightarrow \eta'(x) = \frac{1}{x}\eta(x)$$

Daher erkennt man: $\eta(x) = x$ ist eine Lösung dieser Dgl. Dann ist $h'(x) = -\frac{1}{x}$, also $h(x) = -\log x$. Damit ist ein Fundamentalsystem bestimmt:

$$Y(x) := \begin{pmatrix} x^2 & x^2 \log x \\ -x & x + x \log x \end{pmatrix}$$

ist Fundamentalsystem, denn $\det Y(x) \neq 0$ für $x \in (0, \infty)$. Um nun das AWP $y'(x) = A(x)y(x), y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu lösen, betrachte man das LGS

$$Y(1)c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des obigen AWP ist somit

$$y(x) := Y(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2x^2 \log x \\ x + 2x \log x \end{pmatrix} \qquad x \in (0, \infty)$$

11 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Definition 11.22 Exponentialfunktion auf Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Dann wird definiert

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Diese Reihe ist absolut konvergent.

Bemerkung Eigenschaften von e^A

Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

(1) $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ (im Allgemeinen sind alle drei verschieden)

(2) e^A ist invertierbar und es gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

(3) Sei $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p \times p}$ definiert durch $Y(x) := e^{xA}$ mit $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ fest. Dann ist $Y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times p})$ und es gilt $Y^{(n)}(x) = A^n e^{xA}$. Insbesondere ist also e^{xA} ein Fundamentalsystem von $Y'(x) = AY(x)$, und zwar genau dasjenige, das bei $x = 0$ die Einheitsmatrix I liefert.

(4) Mit jeder submultiplikativen Matrixnorm $|||\cdot|||$ gilt $\left|\left|\left|e^{xA}\right|\right|\right| \leq e^{|x|\,|||A|||}$.

Bemerkung Eigenvektoren

Ist nun λ reeller Eigenwert zu $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, v zugehöriger reeller EV, so gilt:

$$e^{xA}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \lambda^k}{k!} v = e^{\lambda x} v$$

Dies bedeutet ohne Umwege, dass $y(x) := e^{\lambda x} v$ eine Lösung des Dgl-Systems ist.

Herleitung Berechnung eines Fundamentalsystems

Die explizite Berechnung von e^{xA} ist in vielen Fällen nicht durchführbar. Hier soll deswegen ein anderes Verfahren vorgestellt werden, das mit Hilfe der Jordan'schen Normalform ebenfalls auf ein FS führt.

Da i.A. EWe und EVen nicht reell sind, ist es naheliegend, $y'(x) = Ay(x)$ im $\mathbb{C}^p$ statt im $\mathbb{R}^p$ zu betrachten. Sei $y := \xi + i\eta$. Für die (weiterhin reelle) Matrix A ist dann

$$\Re\{Ay\} = A\xi \qquad \Im\{Ay\} = A\eta$$

Fast alle Definitionen und Sätze aus Ana II übertragen sich wörtlich, wenn man den $\mathbb{C}^p$ mit der Euklidnorm

$$\|y\|_C = \sqrt{\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2}$$

versieht. Falls ein EW $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ zum EV $v \notin \mathbb{R}^p$ existiert, so sind doch $\Re\{e^{\lambda_1 x} v_1\}$ und $\Im\{e^{\lambda_1 x} v_1\}$ reelle Lösungen. Allgemein gilt: Ist $y : I \to \mathbb{C}^p$ mit $y(x) = \xi(x) + i\eta(x)$ eine Lösung von $y'(x) = A(x)y(x)$, so gilt

$$\xi'(x) + i\eta'(x) = A\xi(x) + iA\eta(x)$$

Zu A existiert nun ein $T \in \mathbb{C}^{p\times p}$ so, dass gilt $J := T^{-1}AT$ und J Jordan-Normalform besitzt. Dann ergibt sich $J^k = T^{-1}A^kT$ für $k \in \mathbb{N}$. und damit

$$e^{xJ} = T^{-1}e^{xA}T$$

wobei man, um e^{xJ} zu berechnen, lediglich e^{xJ_i} für jedes Jordankästchen J_i (mit $j = 1, \ldots, q$) einzeln berechnen muss, dies geht relativ einfach folgendermaßen: Habe J_i die Größe $r \times r$.

Ist $r = 1$, so haben wir kein Problem. Andernfalls betrachte die Matrix

$$\tilde{J}_i := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $J_i = \lambda I + \tilde{J}_i$. Für $\tilde{J}_i^k$ ist zu beachten, dass die 1er-Diagonale von $J_i^0 = I$ aus gezählt, um k Schritte nach links unten "gewandert" ist. Damit ergibt sich sofort

$$e^{x\tilde{J}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

und weiterhin $e^{xJ_i} = e^{\lambda x} e^{x\tilde{J}_i}$.

Nun gilt: $T \cdot e^{xJ} = e^{xA}T$, und da nun $e^{xA}T$ ebenfalls ein Fundamentalsystem (bestehend aus LK der Spalten von e^{xA}), muss Te^{xJ} ebenfalls eines sein. Wie oben gesehen, sind die Spalten von Te^{xJ} Polynome mit Koeffizienten $q_i \in \mathbb{C}^p$ vom Grad $\leq r-1$, wobei r in diesem Fall die Dimension des größten zu einem EW λ gehörigen Jordanblocks darstellen soll.

Insgesamt ergibt sich also für den Fall mehrfacher Eigenwerte das folgende

Bemerkung Rechenverfahren bei mehrfachen Eigenwerten

Treten mehrfache Eigenwerte auf, so führt das schlichte Ausrechnen von Eigenwerten und -vektoren nicht mehr zwingend auf ein Fundamentalsystem. Sei λ nun mehrfacher Eigenwert, wähle EV v_1 zu λ. Damit ist $y_1(x) := e^{\lambda x} v_1$ eine Lösung.

Nächster Ansatz: $y_2(x) := e^{\lambda x}(xv_1 + v_2)$, dies führt auf ein LGS für v_2, nämlich $(A - \lambda I)v_2 = v_1$. Induktiv fortgesetzt ergibt sich der Ansatz

$$y_i(x) := e^{\lambda x} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} v_{i-j} x^j \right) = e^{\lambda x} \left(\frac{v_i}{0!} + \frac{v_{i-1}x}{1!} + \cdots + \frac{v_1 x^{i-1}}{(i-1)!} \right)$$

der wiederum auf das LGS $(A - \lambda I)v_i = v_{i-1}$ führt.

12 Explizite Dgl'en höherer Ordnung

Herleitung Übertragung von Ergebnissen aus Ordnung 1

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kp}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$. Wir betrachten die Dgl

$$y^{(k)} = f(x, y(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \tag{*}$$

Viele Ergebnisse über Dgl'en 1. Ordnung lassen sich folgendermaßen auf $(*)$ übertragen: Betrachte $F : D \to \mathbb{R}^{kp}$ definiert durch

$$F(x, z) := (z_2, z_3, \ldots, z_k, f(x, z))$$

Beachte $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^{kp}$ mit $z_j \in \mathbb{R}^p$. Betrachte nun die zugehörige Dgl. 1. Ordnung

$$z'(x) = F(x, z(x)) \tag{**}$$

gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_{k-1}'(x) \\ z_k'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ \vdots \\ z_k(x) \\ f(x, z_1(x), \ldots, z_k(x)) \end{pmatrix}$$

Damit ist klar, wie sich eine Lösung einer Gleichung der Form $(*)$ in eine Lösung einer Gleichung der Form $(**)$ und umgekehrt verwandeln lässt. In diesem Sinne sind $(*)$ und $(**)$ äquivalent.

Definition 12.23 Lipschitz-Stetigkeit

Sei $D = [a, b] \times \mathbb{R}^{kp}$, $f : D \to \mathbb{R}^p$. Weiter existiere ein $L > 0$ so, dass

$$(\forall (x, z), (x, \tilde{z}) \in D)(\|f(x, z) - f(x, \tilde{z})\|_1 \le L\|z - \tilde{z}\|_2)$$

Dann nennt man f Lipschitz-stetig auf D bzgl. der letzten kp Perameter. (Achtung: $\|\cdot\|_1$ ist Norm auf $\mathbb{R}^p$, $\|\cdot\|_2$ dagegen Norm auf $\mathbb{R}^{kp}$)

Satz 12.16 Satz von Picard-Lindelöf

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a, b] \times \mathbb{R}^{kp}, \mathbb{R}^p)$ Lipschitz-stetig bezüglich der letzten kp Parameter

Dann ist das AWP

$$y^{(k)} = f(x, y(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \qquad y^{(i)}(x_0) = y_i \ (0 \le i \le i - 1)$$

(mit $x_0 \in [a, b], y_i \in \mathbb{R}^p$ fest) eindeutig lösbar auf $[a, b]$.

Satz 12.17 Satz von Peano

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$, $(x_0, y_0, \ldots, y_{k-1}) \in D$

Dann besitzt das AWP

$$y^{(k)} = f(x, y(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \qquad y^{(i)}(x_0) = y_i \ (0 \le i \le i - 1)$$

(mit $x_0 \in [a, b], y_i \in \mathbb{R}^p$ fest) eine Lösung.

12.1 Lineare Differentialgleichungen k-ter Ordnung

Definition 12.24 Lineare Differentialgleichung (III)

Eine Gleichung der Form

$$y^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) = r(x) \tag{*}$$

mit $a_i, r \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$. heißt lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung. Bezeichnung: $(*)$ heißt homogen $\Leftrightarrow r = 0$, ansonsten inhomogen.

Bemerkung

Beachte:

- Hier ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, z_1, \dots, z_k) = r(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) z_{i+1}$$

- f erfüllt gerade die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Damit ist $(*)$ eindeutig lösbar auf $[a,b]$.

Bemerkung Der homogene Fall $(r = 0)$

Das zugehörige System 1. Ordnung ist $z'(x) = A(x)z(x)$ mit $A(x) \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R}^{p\times p}$ und

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

Satz 12.18

Voraussetzung: $r = 0$, $V = \{y \in \mathrm{C}^k([a,b],\mathbb{R}) \mid y \text{ löst } (*)\}$

Dann ist V VR und es gilt $\dim V = k$.

Bemerkung

Auch hier heißt jede Basis von V Fundamentalsystem.

12.2 Lineare Dgl'en k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Bemerkung

Falls $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ nicht von x abhängen, ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

eine $k \times k$-Matrix mit dem charakteristischen Polynom

$$p(x) := \det(A - \lambda I) = (-1)^k (\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \lambda a_1 + a_0)$$

Satz 12.19

Voraussetzung: λ r-fache Nullstelle von $p(x)$

Dann entsprechen λ die r Lösungen

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ist dabei $\lambda = \xi + i\eta \notin \mathbb{R}$, so erhält man $2r$ Lösungen

$$x^q e^{\xi x} \cos(\eta x), x^q e^{\xi x} \sin(\eta x) \qquad (x \in \mathbb{R}, q = 0, \dots, r-1)$$

Dabei streicht man diejenigen r Lösungen, die zu $\overline{\lambda}$ gehören. Auf diese Weise erhält man ein reelles FS für die homogene Dgl

$$y^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) = 0$$

Bemerkung Im Falle der Inhomogenität

Bei speziellen $r(x)$ (z.B. bei Kombinationen aus Polynomen, Exponential- und trigonometrischen Funktionen) kommt man evtl. mit besonderen Ansätzen durch, die in der Regel recht ähnlich zu $r(x)$ aussehen, evtl. noch mit einem Polynom/Faktor multipliziert.

13 Potenzreihenentwicklung von Lösungen

Definition 13.25 Mehrdimensionale Potenzreihe

Seien $a_{jk} \in \mathbb{R}$ $(j,k \in \mathbb{N}_0)$ und $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt

$$f(x,y) := \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}(x-x_0)^j(y-y_0)^k$$

eine zweidimensionale Potenzreihe und weiterhin $f(x,y)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, falls die Reihe in einer ε-Umgebung von (x_0,y_0) absolut konvergiert.

Definition für mehr Dimensionen analog.

Konvention für Kapitel 13

Seien $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $(x_0,y_0) \in D$ und $f \in C^\infty(D,\mathbb{R})$ eine Funktion, die in einer Umgebung von (x_0,y_0) in eine Potenzreihe entwickelbar ist, sei also

$$f(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}(x-x_0)^j(y-y_0)^k$$

Bemerkung

Ohne weitere Umstände erhalten wir, dass das AWP $y'(x) = f(x,y(x)), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar ist, denn aus der C^∞-Eigenschaft von f folgen unmittelbar Stetigkeit und lokale Lipschitz-Stetigkeit.

Herleitung Majorantenmethode

Sei also nun $I := (\omega_-,\omega_+)$ und $y : I \to \mathbb{R}$ die Lösung.

Ist y in der Nähe von x_0 in eine PR entwickelbar? Ja, dies kann mit Hilfe des folgenden Verfahrens gezeigt werden.

Zunächst einmal kann das AWP $y'(x) = f(x,y(x)), y(x_0) = y_0$ durch $z(x) := y(x+x_0) - y_0$ so transformiert werden, dass gilt: $z'(x) = f(x,z(x)), z(0) = 0$. Daher betrachten wir im Folgenden o.B.d.A. den Fall, dass $(x_0,y_0) = (0,0)$ ist.

$$\begin{aligned}
y''(x) =& f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))f(x,y(x)) \\
y'''(x) =& f_{xx}(x,y(x)) + f_{xy}(x,y(x))f(x,y(x)) + f_{yx}(x,y(x))f(x,y(x)) + \\
& f_{yy}(x,y(x))(f(x,y(x)))^2 + \\
& f_y(x,y(x))(f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x)))f(x,y(x))
\end{aligned}$$

Beobachtung: $y^{(k)}(x)$ kann für jedes $k \in \mathbb{N}$ dargestellt werden als endliche Summe von nichtnegativen Vielfachen von Produkten der Art $f(x,y(x)) \cdot g(x,y(x))$, wobei g eine partielle Ableitung von f ist.

Beachte, dass unter den gegebenen Voraussetzungen gilt: (a_{jk} waren die Koeffizienten der Potenzreihe von f)

$$a_{jk} = \frac{1}{j!k!}\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^k}{\partial y^k}f\right)(0,0)$$

Somit erhält man speziell für $x = x_0 = 0$ einige Abhängigkeiten zwischen den a_{jk} und den folgendermaßen definierten

$$a_n := \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

und zwar z.B. (Beachte: Die Fakultäten dienen lediglich zur Korrektur der entsprechenden Vorfaktoren der a_{jk} und a_n)

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, a_1 = f(0,0) = a_{00} \\
&a_2 = \frac{1}{2!}(a_{10} + a_{01}a_{00}) \\
&a_3 = \frac{1}{3!}(2!a_{20} + 2!a_{00}a_{11} + 2!a_{02}a_{00}^2 + a_{10}a_{01} + a_{01}^2 a_{00})
\end{aligned}$$

Also sind die a_n darstellbar als Summe von nichtnegativen Vielfachen von Produkten der $a_j k$.

Wegen $\lim\limits_{j,k\to\infty} |a_{jk}|\varepsilon^j\varepsilon^k = 0$ existiert ein $M > 0$ so, dass $|a_{jk}|\varepsilon^j\varepsilon^k \leq M$ für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$. Man setzt nun

$$A_{jk} := \frac{M}{\varepsilon^j\varepsilon^k}$$

in einer Reihe

$$F(x,y) := \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk}x^j y^k = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{M}{\varepsilon^j\varepsilon^k} x^j y^k$$

Es gilt $|a_{jk}| \leq A_{jk}$. Sei außerdem $\varepsilon > 0$ so, dass F absolut konvergent für alle $(x,y) \in (-\varepsilon,\varepsilon)^2$. Für F lässt sich ein expliziter Ausdruck angeben. Weil F absolut konvergiert, gilt folgende Umordnung:

$$F(x,y) = M\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^j \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^k = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{y}{\varepsilon}\right)}$$

Mit Hilfe des Verfahrens für Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen erhalten wir eine Lösung des AWP $w'(x) = F(x, y(x)), w(0) = 0$, nämlich

$$w(x) = \varepsilon - \varepsilon\sqrt{1 + 2M\log\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)}$$

Mit Hilfe der beiden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned}
\log(1-t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{t^n}{n} \\
\sqrt{1+t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n
\end{aligned}$$

überlegt man sich leicht, dass $w(x)$ um 0 eine Potenzreihendarstellung mit Konvergenzradius $R < \varepsilon$ besitzt. Für

$$A_n := \frac{w^{(n)}(0)}{n!}$$

folgt aus obigen Formeln $|a_n| \leq A_n$ auf die folgende Art und Weise (hier als Beispiel für A_2)

$$|a_2| = \frac{1}{2}|a_{10} + a_{01} + a_{00}| \leq \frac{1}{2}(|a_1 0| + |a_{01}| + a_{00}|)$$
$$\leq \frac{1}{2}(A_{10} + A_{01} + A_{00}) = A_2$$

(wesentlich: die Nichtnegativität der Vorfaktoren in den obigen Summen!) Deswegen hat auch die Reihe

$$\tilde{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mindestens den Konvergenzradius R. (Bem: Es gilt $|w(x)| < \varepsilon$ auf $U_R(0)$ wegen der Lösbarkeitseigenschaften von $w'(x) = F(x, w(x))$) Es bleibt nun zu zeigen, dass gilt $y = \tilde{y}$ auf $U_R(0)$ gilt. Da $\tilde{y}'(x)$ und $f(x, \tilde{y})$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\geq R$ sind und da die a_n so bestimmt sind, dass

$$(\tilde{y}')^{(n)}(0) = \tilde{y}^{(n+1)} = \frac{d^n}{dx^n} f(x, \tilde{y}(x))|_{x=0} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

folgt $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$ $(x \in U_R(0))$, Weiter ist $\tilde{y}(0) = a_0 = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des AWPs folgt nun $y(x) = \tilde{y}(x)$ auf $U_R(0)$.

Beachte: diese Methode funktioniert in analoger Weise auch für Systeme und Dgl'en höherer Ordnung.

Bemerkung

Generell ist der Potenzreihen-Ansatz (unabhängig von obiger Theorie) ein Lösungsverfahren für AWPe, wenn man nachweisen kann, dass eine formal berechnete PRe eine Lösung darstellt.

Solche formalen Potenzreihen erhält man wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen induktiv durch Koeffizientenvergleich in der durch das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$ (implizit) gegebenen Rekursionsformel.

14 Stetige Abhängigkeit von Lösungen

Satz 14.20

Voraussetzung: $f, f_k \in C([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ mit $\|f_k(x,y)\| \leq M$ $(k \in \mathbb{N}, (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p)$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x,y) = f(x,y)$ glm auf $[a,b] \times \overline{U_{M(b-a+1)}(0)}$.

$(x_{0k})_{k=1}^{\infty} \subset [a,b]$, $(y_{0k})_{k=1}^{\infty} \subset \overline{U_M(0)}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset C([a,b], \mathbb{R}^p)$ Funktionenfolge mit $y_k'(x) = f_k(x, y_k(x)), y_k(x_{0k}) = y_{0k}$ für $k \in \mathbb{N}$

Dann besitzt (y_k) eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösung der Dgl $y'(x) = f(x, y(x))$ auf $[a,b]$ ist.

Gilt zusätzlich $x_{0k} \to x_0$, $y_{0k} \to y_0$ für $k \to \infty$ und ist das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar, so konv. (y_k) glm gegen die Lösung des AWP.

Satz 14.21

Voraussetzung: $R > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^p$, $f \in \mathrm{C}([a,b] \times U_R(y_0), \mathbb{R}^p)$. $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar auf $[a,b]$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ die Lösung

Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

Sind $\tilde{f} \in \mathrm{C}([a,b] \times U_R(y_0), \mathbb{R}^p)$, $\tilde{y}_0 \in U_R(y_0), \tilde{x}_0 \in [a,b]$ und gilt

$$\left\| f(x,y) - \tilde{f}(x,y) \right\| \leq \delta \qquad (x,y) \in [a,b] \times U_R(y_0)$$

weiterhin $\|y_0 - \tilde{y}_0\| < \delta$, $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$, so gilt für jede nicht fortsetzbare Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ des AWPs $\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)), \tilde{y}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$:

$J = [a,b]$ und $\|y(x) - \tilde{y}(x)\| < \varepsilon$ für $x \in [a,b]$.

Hilfssatz

Voraussetzung: $D = [a,b] \times \mathbb{R}^p$, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$ und f Lipschitz-stetig bzgl. y mit Konstante L

Beachte: Obige Voraussetzungen entsprechen gerade denen des Satzes von Picard-Lindelöf. Betrachte die AWP'e

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f(x, y_1(x)), y_1(x_0) = y_{01} \\ y_2'(x) &= f(x, y_2(x)), y_2(x_0) = y_{02} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich, dass

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq e^{L(b-a)} \|y_{01} - y_{02}\| \qquad (x \in [a,b])$$

(etwa "Lipschitz-stetige Abhängigkeit vom Anfangswert") Daher ergibt sich die stetige Abhängigkeit der Lösung des AWP vom Anfangswert in folgender Form:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|y_{01} - y_{02}\| < \delta \implies \|y_1 - y_2\|_\infty < \varepsilon)$$

(Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{e^{L(b-a)}}$)

15 Differentialungleichungen

Konvention für Kapitel 15

Gelte stets $p = 1$.

Satz 15.22

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebig, $f : D \to \mathbb{R}$, $u, v \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $(x,u(x)),(x,v(x)) \in D$ für $x \in [a,b]$,$u(a) \leq v(a)$, $u'(x) - f(x,u(x)) < v'(x) - f(x,v(x))$ auf $[a,b]$

Dann gilt $u(x) < v(x)$ für $x \in (a,b]$.

Bemerkung

Satz 15.22 gilt nicht für "$\leq$" anstelle von $<$ in der Voraussetzung. (Gegenbeispiel: $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ mit $u(x) = x^2, v(x) = 0$ an der Stelle 0)

Bemerkung Gewinnung von Abschätzungen der Lösungen

Insbesondere gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass D offen, $f \in \mathrm{C}(D,\mathbb{R})$, $u, v \in \mathrm{C}^1([x_0,b],\mathbb{R})$ mit $u(x_0) \leq y_0 \leq v(x_0)$ und

$$u'(x) - f(x,u(x)) < 0 < v'(x) - f(x,v(x))$$

dass für eine Lösung $y : [x_0,b] \to \mathbb{R}$ des AWP's $y'(x) = f(x,y(x)), y(x_0) = y_0$ gilt $u(x) < y(x) < v(x)$ für $x \in (x_0,b]$.

Funktionen mit obigen Eigenschaften heißen Oberfunktionen bzw. Unterfunktionen.

Satz 15.23

Voraussetzung: $D = [a,b) \times \mathbb{R}$ ($b = \infty$ zugelassen), $f \in \mathrm{C}(D,\mathbb{R})$, $(x_0,y_0) \in D$

Dann besitzt das AWP $y'(x) = f(x,y(x)), y(x_0) = y_0$ eine größte nach rechts nicht fortsetzbare Lösung $\overline{y} : [x_0,\overline{\omega}_+) \to \mathbb{R}$ und eine kleinste nach rechts nicht fortsetzbare Lösung $\underline{y} : [x_0,\underline{\omega}_+) \to \mathbb{R}$, so dass für jede nicht fortsetzbare Lösung $y : [x_0,\omega_+) \to \mathbb{R}$ mit $\eta^* := \min\{\overline{\omega}_+,\underline{\omega}_+\}$ gilt $\omega_+ \geq \eta^*$ und $\underline{y} \leq y \leq \overline{y}$ auf $[x_0,\eta^*)$.

Die Lösungen $\overline{y},\underline{y}$ sind dabei eindeutig bestimmt und monoton wachsend vom Anfangswert abhängig.

Bemerkung

Dazu gibt es zu sagen:

(1) Ist das AWP $y'(x) = f(x,y(x)), y(x_0) = y_0$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ nach rechts eindeutig lösbar, so hängt die Lösung monoton wachsend vom AW ab.

(2) Eine entsprechende Überlegung ist natürlich auch "nach links" möglich.

(3) Der anschließende Satz 15.24 ist eine Abschwächung von Satz 15.23.

Satz 15.24

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und beschränkt, $y_0 \in \mathbb{R}$

Dann besitzt das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$ eine größte und eine kleinste Lösung $\overline{y}, \underline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Diese sind eindeutig bestimmt und monoton wachsend vom Anfangswert abhängig.

Hilfssatz

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. y, $u, v \in \mathrm{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ mit $u'(x) - f(x, u(x)) < 0 < v'(x) - f(x, v(x))$, $u(a) \leq y_0 \leq v(a)$

Dann ist das AWP $y'(x) = f(x, y(x))$ eindeutig lösbar und die Lösung $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ dieses AWP's erfüllt

$$u(x) \leq y(x) \leq v(x) \qquad (x \in [a,b])$$

In diesem Fall heißen u, v wieder Ober- bzw Unterfunktion des AWP.

16 Randwertprobleme

Definition 16.26 Randwertproblem 2. Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2p}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Das Randwertproblem/RWP besteht darin, Funktionen $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ zu finden mit

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x))y'(x)) \\ R_a(y) = 0 \qquad R_b(y) = 0 \end{cases}$$

Dabei sind $R_a(y)$ und $R_b(y)$ Bedingungen für $x = a$ und $x = b$. Typische Beispiele sind mit $\gamma \in \mathbb{R}$ etwa:

$R_a(y) = y(a) - \gamma$	Randbedingung 1. Art	Dirichlet'sche RB
$R_a(y) = y'(a) - \gamma$	Randbedingung 2. Art	Neumann'sche RB
$R_a(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) - \gamma$	Randbedingung 3. Art	Gemischte RB

Im folgenden betrachten wir meist den Fall $p = 1$.

Beispiel

Es können jede Menge Fälle auftreten:

- $y''(x) - \pi^2 y(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0 \implies y(x) = c\sin(\pi x)$, $c \in \mathbb{R}$
- $y''(x) - \pi^2 y(x) + 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0 \implies$ keine Lösung
- $y''(x) - \pi^2 y(x)$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0 \implies y(x) = 0$ eindeutig

wobei in jedem Fall von den möglichen Lösungen der Dgl ausgegangen wird.

16.1 Der lineare Fall

Herleitung Lösbarkeit von linearen RWP

Seien $r, a_0, a_1 \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$. Wir betrachten das RWP

$$(*) \begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_a \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_b \end{cases}$$

Seien dabei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$. Nun sei $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

und $y_s : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Dgl in $(*)$. Die Lösung dieser Dgl sind also Funktionen der Form $y = y_s + c_1 y_1 + c_2 y_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die Randbedingungen sind genau dann erfüllt, wenn $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ Lösung des folgenden LGS ist:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a) & \gamma_a - \alpha_1 y_s(a) - \alpha_2 y_s'(a) \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) & \gamma_a - \beta_1 y_s(b) - \beta_2 y_s'(b) \end{array} \right)$$

Bezeichnet man die linke 2×2-Matrix mit R, so folgt, dass $(*)$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn R regulär ist. Daher kann die Regularität von R nicht vom gewählten Fundamentalsystem abhängen. $(*)$ ist insbesondere genau dann eindeutig lösbar, wenn es für das folgende zugehörige, sogenannte "homogene" RWP nur die triviale Lösung gibt:

$$(**) \begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Hat man also ein Fundamentalsystem für die Dgl in einem Randwertproblem der Art $(*)$ gefunden, so ist die eindeutige Lösbarkeit gleichwertig mit der Frage nach der Regularität von R.

Falls $(**)$ mehrdeutig lösbar ist, ist wegen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ die Lösungsmenge ein Vektorraum der Dimension 1. In diesem Fall ist $(*)$ mehrdeutig oder nicht lösbar.

16.2 Nichtlineare Randwertprobleme

Herleitung Das Dirichlet-Randwertproblem

Sei $f \in \mathrm{C}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und

$$(*) \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Man kann $(*)$ wie folgt in eine Integralgleichung umschreiben: Wir betrachten die Funktion $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi(x-1) & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ x(\xi-1) & 0 \le x \le \xi \le 1 \end{cases}$$

G ist stetig. Weiterhin betrachten wir die Abbildung $T : \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit

$$T(u)(x) := \int\limits_0^1 G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi$$

Dann gilt: Für jedes $u \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ ist $T(u) \in \mathrm{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, $T(u)(0) = T(u)(1) = 0$ (wegen $G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0$ für $\xi \in [0,1]$) und $T''(u)(x) = f(x,u(x))$ (nachrechnen). Damit gilt:

$$y \in \mathrm{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \text{ ist eine Lösung von } (*) \Leftrightarrow y \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), T(y) = y$$

“ $\Longrightarrow$ ” wurde nur für eindeutig lösbare RWPe gerechtfertigt, dort gilt für die Lösung obige Gleichheit notwendigerweise.

Allgemein heißt ein solches G eine Green'sche Funktion. Man kann auch andere RWP'e mit Hilfe Green'scher Funktionen in Integralgleichungen umschreiben, z.B. obiges Problem für ein beliebiges Intervall $[a,b]$ mit:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{a}\xi(x-a) & 0 \le \xi \le x \le a \\ \frac{1}{a}x(\xi-a) & 0 \le x \le \xi \le a \end{cases}$$

(Mehr zu Green'schen Funktion in Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kapitel 26)

Satz 16.25

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, f Lipschitz-stetig bzgl. y mit Lipschitz-Konstante $L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$

Dann ist das RWP

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y(x)) \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

eindeutig lösbar.

Bemerkung

Am Beispiel am Anfang des Kapitels sieht man, dass die gegebene Schranke wirklich optimal ist.

Satz 16.26 Satz von Scorza-Dragoni

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\|f\|_\infty \leq M > 0$

Dann besitzt das RWP

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung.

Bemerkung

Ergänzend ist folgendes zu sagen:

- Die Lösung ist nicht notwendigerweise eindeutig. Beispiel: Betrachte

$$f(y) = \begin{cases} 1 & y \leq -1 \\ -y & -1 < y < 1 \\ -1 & y \geq 1 \end{cases}$$

  Dann sind u.a. alle Funktionen $y : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \alpha \sin x$ mit $|\alpha| \leq 1$ Lösung des RWP.

- Der Satz gilt auch dann, wenn man noch $y'(x)$ in den Argumenten von f zulässt.

- Eine Beweismöglichkeit für Satz 16.26 benutzt den Fixpunktsatz von Brouwer, der im folgenden erwähnt werden soll.

Hilfssatz Fixpunktsatz von Brouwer

Voraussetzung: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ kompakt und konvex, $f \in \mathrm{C}(K, K)$

Dann hat f einen Fixpunkt.

Hilfssatz Fixpunktsatz von Schauder

Voraussetzung: $(E, \|\cdot\|)$ Banachraum, $\emptyset \neq K \subseteq E$ kompakt und konvex, $\overline{f(K)}$ kompakt

Dann hat f einen Fixpunkt.

Bemerkung Leichte Verallgemeinerung von Satz 16.26

Aus Satz 16.26 erhält man auch die Lösbarkeit von RWPen der Form

$$y''(x) = f(x, y(x)), y(a) = \gamma_a, y(b) = \gamma_b \tag{*}$$

mit stetigem und beschränktem f. Betrachte dazu

$$\tilde{f}(x,z) = f(x, z + \gamma_b \frac{x-a}{b-a} + \gamma_a \frac{b-x}{b-a})$$

Nach Satz 16.26 ist also

$$z''(x) = f(x, z(x)), z(a) = 0, z(b) = 0$$

lösbar, sei z diese Lösung. Betrachte dann $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) := z(x) + \gamma_b \frac{x-a}{b-a} + \gamma_a \frac{b-x}{b-a}$$

Dann ist offenbar $y(x)$ Lösung von $(*)$.

17 Autonome Differentialgleichungen und Stabilität

Bemerkung Gegenstand der Betrachtung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$. Wir betrachten

$$y'(x) = f(y(x)), y(x_0) = y_0 \tag{*}$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in D$. Man beobachtet zunächst folgendes:

- $f(y_0) = 0 \implies y \equiv y_0$ ist Lösung.
- Ist $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ Lösung von $(*)$, so ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ auch $z : [x_0 - \xi, \infty) \to \mathbb{R}^p$ mit $z(x) := y(x + \xi)$ eine Lösung der Dgl. in $(*)$ (jedoch i.a. nicht des AWP)
- Ist $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von $(*)$ und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) \in D$, so gilt $f(\lim\limits_{x\to\infty} y(x)) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x)$.

Definition 17.27 Gleichgewicht

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$ und

$$y'(x) = f(y(x)) \tag{*}$$

Eine Stelle $y_0 \in D$ mit $f(y_0) = 0$ heißt Gleichgewichtspunkt, die dazugehörige Lösung $y \equiv y_0$ Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung.

Definition 17.28 Stabilität

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R}^p)$ und $y_0 \in D$ eine Nullstelle von f. Dann heißt

(1) y_0 stabiler Gleichgewichtspunkt $:\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass falls für $y_1 \in D$ mit $\|y_1 - y_0\| < \delta$ und $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ eine nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des AWPs $y'(x) = f(y(x)), y(x_0) = y_1$ folgt $\omega_+ = \infty$ und $\|y(x) - y_0\| < \varepsilon$ für $x \geq x_0$.

(2) y_0 instabiler Gleichgewichtspunkt $:\Leftrightarrow$ y_0 nicht stabil.

(3) y_0 asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt $:\Leftrightarrow$ wie (1), lediglich folgt zusätzlich, dass $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = y_0$.

Bemerkung

Aha! Es ist folgendes zu beobachten:

- Die Definition ist unabhängig von der gewählten Norm und der Wahl der Anfangsstelle x_0.
- Nach Definition gilt "asymptotisch stabil $\implies$ stabil". Die Eigenschaft $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = y_0$ genügt jedoch im Gegenzug nicht für Stabilität.
- y_0 stabil $\implies$ AWP $y'(x) = f(y(x)), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar, weil jede tatsächlich verschiedene Lösung irgendwann einmal die in der Def. erwähnte ε-Umgebung verlässt.

17.1 Ein Stabilitätssatz

Satz 17.27

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $y_0 \in D$, $f(y_0) = 0$, für jeden EW $\lambda \in \mathbb{C}$ von $f'(y_0) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ gelte $\Re\{\lambda\} < 0$

Dann ist y_0 asymptotisch stabil.

Bemerkung

Ist $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ mit $\Re\{\lambda\} < 0$ für alle EWe λ von A, so ist nach Satz 17.27 $y_0 = 0$ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von $y'(x) = Ay(x)$. Dies folgt auch nach Paragraph 11.

Beachte: Falls die EW-Bedingung gilt, ist A regulär, also 0 einziger Gleichgewichtspunkt.

Zum Beweis von Satz 17.27 verwenden wir den folgenden Hilfssatz:

Satz 17.28

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle EWe $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt: $\Re\{\lambda\} < c$

Dann existiert ein Skalarprodukt mit

$$\langle y, Ay\rangle \leq c\|y\|_0^2$$

dabei sei $\|\cdot\|_0$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugte Norm.

17.2 Ein Instabilitätssatz

Satz 17.29

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^p)$, $y_0 \in D$ mit $f(y_0) = 0$. Es existiere ein EW λ von $f'(y_0)$ mit $\Re\{\lambda\} > 0$

Dann ist y_0 ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Bemerkung Charakterisierung der Stabilität bei linearen Systemen

Im Falle $\Re\lambda \leq 0$ für alle EWe der Matrix $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ können über die Stabilität der 0 als Gleichgewichtspunkt von $y'(x) = Ay(x)$ folgende Aussagen gemacht werden:

- Existiert zu einem EW $\lambda = 0$ ein nichttrivialer Jordanblock (also einer, der Einsen außerhalb der Diagonalen hat), so ist die 0 instabil.
- Sind alle Jordanblöcke zu EWen λ mit $\Re\lambda = 0$ trivial, so ist die 0 stabil.

Diese Ergebnisse können leicht auch auf andere Gleichgewichtspunkte $x \neq 0$ übertragen werden, während die Übertragung auf nichtlineare Systeme in dieser Form nicht möglich ist. (Bsp. $y'(x) = \pm y^3(x)$ wird im Fall "$-$" bei 0 asympt. stabil, im Fall "+" allerdings instabil)

17.3 Liapunov-Funktionen

Konvention für Kapitel 17

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ sei lokal Lipschitz-stetig. Wir nehmen o.B.d.A. $0 \in D$ und $f(0) = 0$ an. (sonst Transformation)

Definition 17.29 Liapunov-Funktion

Eine stetige Funktion $V : U_r(0) \to \mathbb{R}$ mit $U_r(0) \subseteq D$ heißt Liapunov-Funktion (in 0) :$\Leftrightarrow$

(1) $V \in \mathrm{C}^1(U_r(0), \mathbb{R})$

(2) $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ für alle $y \in U_r(0) \setminus \{0\}$

(3) $\operatorname{grad} V(y) \cdot f(y) \leq 0$ für alle $y \in U_r(0)$.

Satz 17.30

Voraussetzung: D offen, $0 \in D$, $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz-stetig, besitze eine Liapunov-Funktion $V : U_r(0) \to \mathbb{R}$

Dann ist 0 stabiler Gleichgewichtspunkt. Gilt zusätzlich $\operatorname{grad} V(y) \cdot f(y) < 0$ für alle $y \in U_r(0) \setminus \{y_0\}$, so ist 0 sogar asymptotisch stabil.

Trick Ansatz für Liapunov-Funktionen

Bei einfach aufgebauten Funktionen (z.B. Polynomen) führen oft Polynomansätze mit geraden Exponenten zum Erfolg.

17.4 Der Satz von Chetaev

Satz 17.31 Satz von Chetaev

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ lok. Lipschitzstetig und $f(0) = 0$. Existiere ein $\varepsilon_0 > 0$ und $G \subseteq D$ offen mit $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq D$, $0 \in \partial G$ und $V \in \mathrm{C}(\overline{G}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1(G, \mathbb{R})$.

Gilt für V, dass

- $V(y) > 0$ für alle $y \in G$, $V(y) \leq M$ für alle $y \in \overline{G}$ und ein $M > 0$
- $\operatorname{grad} V(y) \cdot f(y) \geq h(V(y))$ für eine Funktion $h : [0, M] \to \mathbb{R}$, die stetig, streng wachsend sein und $h(0) = 0$ erfüllen muss.
- $V(y) = 0$ für alle $y \in \partial G \cap U_{\varepsilon_0(0)}$

so ist 0 instabiler Gleichgewichtspunkt.

Bemerkung Gleichgewichtspunkte außer 0

Satz 17.31 gilt analog, wenn 0 durch eine beliebige andere Nullstelle y_0 von f ersetzt wird.

Bemerkung Wie findet man Differentialgleichungen?

Gegeben sei $\gamma \in \mathrm{C}^1([0, \infty), \mathbb{R}^p)$. Betrachte dann

$$f : \begin{cases} [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \\ (x, y) \mapsto \|\gamma(x) - y\| y + \gamma'(x) \end{cases}$$

Dann ist $y = \gamma$ genau die Lösung des AWPs $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = \gamma(0)$.

18 Der Satz von Kneser

18.1 Zusammenhängende Mengen

Konvention für Kapitel 18

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein NLR.

Definition 18.30 Zusammenhang

Sei $M \subseteq V$.

- M heißt wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Sind $y, \tilde{y} \in M$, so existiert eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to M$ mit $\gamma(a) = y, \gamma(b) = \tilde{y}$.
- M heißt unzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Es gibt offene Mengen O_1, O_2 mit
  - $M \subseteq O_1 \cup O_2$
  - $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
  - $M \cap O_j \neq \emptyset$ für $j = 1, 2$
- M heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ M ist nicht unzusammenhängend.

Bemerkung Verschiedenster Schnickschnack über zusammenhängende Mengen

Man beobachtet:

- Jede endliche Teilmenge von V, die aus mehr als einem Punkt besteht, ist unzsuammenhängend.
- Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend, daher auch zusammenhängend.
- Sind $M_1, M_2 \subseteq V$ zusammenhängend und nicht disjunkt, so ist $M_1 \cup M_2$ zusammenhängend, aber $M_1 \cap M_2$ im allgemeinen nicht. (z.B. "zwei Würstchen")
- Sei $V = \mathbb{R}$. Dann gilt $M \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ M wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ M Intervall.
- $M \subseteq V$ wegzusammenhängend $\implies$ M zusammenhängend.
- $M \subseteq V$ zusammenhängend $\implies$ $\overline{M}$ zusammenhängend.
- Ist $\dim V \geq 2$ (inklusive ∞), so ex. stets Mengen, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.

  Beispiel: $B := \{(x, \sin x) \mid x \in (0, 1]\}$ ist zwar noch beides, aber $\overline{B}$ nicht mehr. (Betr. z.B. Grenzwerte der Folgen der Maxima und Minima des Sinus-Graphen)

- Eine offene Teilmenge von V ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ sie ist wegzusammenhängend.
- $(V, \|\cdot\|_1), (W, \|\cdot\|_2)$ NLRe, $D \subseteq V$ offen, $M \subseteq D$ zusammenhängend und $f \in \mathrm{C}(D, W)$. Dann ist auch $f(M)$ zusammenhängend.

18.2 Der Satz von Kneser

Konvention für Kapitel 18

Sei $f \in \mathrm{C}([0,1] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ beschränkt (z.B. $\|f\|_\infty \leq c$ mit $c > 0$) Wir betrachten das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = 0 \qquad (*)$$

(alle folgenden Überlegungen gelten natürlich auch für allgemeine AWPe) Nach Satz 7.10 (Peano) existiert jede nicht fortsetzbare Lösung von $(*)$ auf $[0,1]$.

Sei

$$M := \{y : [0,1] \to \mathbb{R} \mid y \text{ löst } (*)\}$$

M heißt auch Lösungs- oder Knesertrichter zum AWP $(*)$. Wir betrachten den Banachraum $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^p)$ mit der Maximumnorm auf $[0,1]$. Offenbar ist $M \subseteq \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^p)$.

Satz 18.32 Satz von Kneser

Unter obigen Bedingungen ist M eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^p)$.

Bemerkung

Man stellt fest:

- Sei $x_0 \in [0,1]$ fest. Die Abbildung $P_{x_0} : \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p$ mit $P_{x_0}(u) \mapsto u(x_0)$ ist stetig. Mit M ist daher auch $P_{x_0}(M)$ zusammenhängend.

  Im Fall $p = 1$ ist $P_{x_0}(M)$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, denn nach Satz 15.24 existiert zu dem betrachteten AWP eine größte und eine kleinste Lösung $\overline{y}, \underline{y} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Im Fall $p \geq 2$ ist M i.a. kompliziert.
- Wir beweisen den Satz für $p = 1$. ($p > 1$ funktioniert bis auf die Lipschitz-stetige Approximation von f völlig analog)
- Satz 18.32 wird auch oft formuliert als "M ist kompakt und zusammenhängend."
- In Ana II wurde für endlichdimensionale NLRe bewiesen: (gilt auch für ∞) $(V, \|\cdot\|)$ NLR, $M \subseteq V$ kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge $(y_n) \subseteq M$ besitzt eine konvergente TF, deren Grenzwert in M liegt. ("Folgenkompaktheit")

- Die Lösungsmenge des AWPs ist folgenkompakt. Aus Satz 7.11 folgt allgemein: $M \subseteq \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}^p)$ folgenkompakt, wenn M gleichgradig stetig, abgeschlossen und beschränkt ist.
- Im Beweis von Satz 18.32 wird u.a. benutzt: $M \subseteq V$ folgenkompakt, $S \subseteq M$, S abgeschlossen $\implies$ S folgenkompakt.

Definition 18.31 Grenzmenge

Sei $y \in \mathrm{C}([x_0,\infty),\mathbb{R}^p)$. Die Menge

$$\omega_+(y) := \{z \in \mathbb{R}^p \mid \exists (x_n) \subseteq [x_0,\infty) \text{ mit } x_n \to \infty, y(x_n) \to z (n \to \infty)\}$$

heißt Grenzmenge der Funktion y. Analog definiert man $\omega_-(y)$.

Bemerkung Eigenschaften der Grenzmenge

Ist y beschränkt, so ist $\omega_+(y)$ beschränkt, abgeschlossen (daher kompakt), nichtleer und zusammenhängend.

Bemerkung Grenzmengen und AWPe

Ist $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz-stetig und das AWP $y'(x) = f(y(x)), y(x_0) = y_0$ lösbar, so kann man die Grenzmenge der Lösung betrachten und schreibt dann kurz $\omega_+(y_0)$, da sie aufgrund der Autonomie des AWPs nicht von x_0 abhängt.

Desweiteren gilt hier: Ist y beschränkt, so ist $\omega_+(y_0)$ kompakt, zusammenhängend und invariant, d.h. für $z_0 \in \omega_+(y_0)$ und $z : [x_0,\omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung von $z'(x) = f(z(x)), z(x_0) = z_0$, so gilt $\omega_+ = \infty$ und $z(x) \in \omega_+(y_0)$ für alle $x \geq x_0$.

Das war's für Analysis I-III. Tschüs! :-)

A Erläuterungen

Definition A.1 Kreuzprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $x = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ und $y = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. Dann ist das Vektor-Kreuzprodukt $x \times y$ folgendermaßen definiert:

$$x \times y := e_x \cdot (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) + e_y \cdot (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1) + e_z \cdot (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

Als Eselsbrücke kann man sich folgendes merken:

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_x & \xi_1 & \eta_1 \\ e_y & \xi_2 & \eta_2 \\ e_z & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

wobei die "Determinante" formal durch Entwickeln nach der ersten Spalte berechnet wird.

Definition A.2 Schreibweise für das Wegintegral

Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Menge, die durch einen Weg γ parametrisiert werden kann, und $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^p)$. Dann definiert man

$$\int\limits_\Gamma f_1(x)dx_1 + \cdots + f_p(x)dx_p := \int\limits_\gamma f(x)dx$$

Die analoge Definition gilt für Wegintegrale nach der Weglänge.

Definition A.3 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator ∇ wird im $\mathbb{R}^p$ formal definiert als der Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Dann ergeben sich formal:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Phi &= \nabla \cdot \Phi \\ \operatorname{div} f &= \nabla \cdot f \\ \operatorname{rot} f &= \nabla \times g \end{aligned}$$

B Das Beste aus Übungen und Blättern

B.1 Exakte Differentialgleichungen

Definition B.1 Exakte Differentialgleichung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Eine Differentialgleichung der Form

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

heißt exakt $:\Leftrightarrow$ (g, h) ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Funktion $G \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit $G_x = g$, $G_y = h$. Diese Funktion heißt dann Stammfunktion.

Definition B.2 Vollständiges Differential

Das vollständige Differential einer Funktion $G \in C^1(D, \mathbb{R})$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ wird definiert als

$$dG := G_x dx + G_y dy$$

Satz B.1

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend (?), $g, h \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit $g_y = h_x$

Dann ist durch

$$G(x,y) := \int_\gamma g(\xi,\eta)d\xi + h(\xi,\eta)d\eta$$

eine Stammfunktion gegeben. Dabei ist γ ein beliebieger Verbindungsweg in D zwischen x, y und (x_0, y_0) bel.

Definition B.3 Integrierender Faktor

Die Dgl $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$ ist im Allgemeinen nicht exakt. Ein stetiger Faktor $\mu(x,y)$ heißt integrierend $:\Leftrightarrow \mu(x,y)g(x,y)dx + \mu(x,y)h(x,y)dy = 0$ ist exakt.

Bemerkung Spezialfall

Hängt $\frac{g_y - h_x}{h}$ nur von x ab, so ist

$$\mu(x) = e^{\int (g_y - h_x)/h \, dx}$$

ein integrierender Faktor. Ebenso: Hängt $\frac{g_y - h_x}{g}$ nur von y ab, so ist

$$\mu(y) = e^{\int (g_y - h_x)/g \, dy}$$

ein integrierender Faktor.

B.2 Tips und Tricks

Satz B.2

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ für jedes feste $x \in [a,b]$ monoton fallend in der zweiten Variablen

Dann besitzt das AWP $y'(f(x,y), y(a) = y_0$ höchstens eine Lösung.

Trick Verfahren für lineare Dgl'en

Ein Verfahren zur Lösung von linearen Differentialgleichungen, das nicht auf einer Lösungsformel beruht, ist folgendes:

- Löse homogenes Problem
- Vorkommende Konstante als $c(x)$ auffassen

- Umstellen, y' bestimmen, nach c' auflösen, integrieren, abschliessend Integrationskonstante bestimmen.

Satz B.3

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R})$

Dann ist f lokal Lipschitz-stetig auf D.

Trick Erkennung von gleichgradiger Stetigkeit

Mit Hilfe des Satzes von Ascoli-Arcelà (Satz 7.11) lässt sich unter Umständen die Annahme, eine Menge sei gleichgradig stetig, zum Widerspruch führen: Findet man eine Folge, die nicht gleichmäßig konvergiert (also z.B. eine Folge stetiger Funktionen gegen eine unstetige), und sind alle anderen Voraussetzungen von Satz 7.11 erfüllt, so ergibt sich direkt, dass die Menge nicht gleichgradig stetig gewesen sein kann.

Satz B.4

Voraussetzung: $T > 0$, $g \in \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R})$, $g(x) \geq 0 (x \in [0, T])$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{g(x)}{x} = 0$

Dann folgt aus

$$g(x) \leq \int_0^x \frac{g(s)}{s} ds \qquad (x \in [0, T])$$

$g(x) = 0$ auf $[0, T]$.

Satz B.5 Satz von Nagumo

Voraussetzung: $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Dann folgt aus

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{x - x_0}$$

für $x > x_0$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, dass das AWP $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ nach rechts eindeutig lösbar ist.

C GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “you”.

A “Modified Version” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “Secondary Section” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “Invariant Sections” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The “Cover Texts” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A “Transparent” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not “Transparent” is called “Opaque”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The “Title Page” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five). C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. D. Preserve all the copyright notices of the Document. E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. H. Include an unaltered copy of this License. I. Preserve the section entitled "History", and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. K. In any section entitled "Acknowledgements" or "Dedications", preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version. N. Do not retitle any existing section as "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

Index

Sätze und Definitionen

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S