Funktionalanalysis II Zusammenfassung

- *Satz von Dini:* X kompakter top. Raum, $(f_n: X \to \mathbb{K})$ monoton wachsend, $f_n \to f$ punktweise, f stetig
  $\Rightarrow f_n \to f$ glm.
- *Hahn-Banach*:
  - In NR: A konvex, offen, B konvex, $A \cap B = \emptyset$
    $\Rightarrow \exists$ein trennendes Funktional.
  - Auf einem Teilraum eines NR def. lineares Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.
  - Ein lineares Funktional auf einem Unterraum eines NR, das durch ein sublineares beschränkt wird, kann unter Beibehaltung der Beschränkung linear fortgesetzt werden.
- *Rieszsches Lemma:* $U < X$ NR, $\delta > 0$, U abg.
  $\Rightarrow \exists x_\delta \in X: \|x_\delta\| = 1, d(x_\delta, U) \geqslant 1 - \delta$.
- *Satz von der offenen Abbildung:* X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$ surjektiv
  $\Rightarrow A$ offen.
- *Banach-Steinhaus/Prinzip der glm. Beschränktheit:*
  X BR, Y NR, $T_i \in L(X, Y)$ $(i \in I)$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ $(x \in X)$
  $\Rightarrow \sup_i \|T_i\| < \infty$.
- *Satz von Arzelà-Ascoli:* $(S,\ d)$ kompakter metr. Raum, $M \subset C(S)$ mit Sup-Norm. M beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig $\Rightarrow M$ kompakt.

1 Vorbereitungen

- X NR, Y BR $\Rightarrow L(X, Y)$ BR.
- *Satz 1.5: Existenz eines Abstandsfunktionals*
  X NR, U abg. UR von X, $x_0 \notin U$, $\delta := d(x_0, U)$
  $\Rightarrow \exists x': \|x'\| = 1, x'(x_0) = \delta, x'(U) = \{0\}$.
- *Satz 1.6: Schwach beschränkt ist beschränkt*
  X NR
  $\Rightarrow M \subset X$ beschr. $\Leftrightarrow \forall x' \in X': x'(M)$ beschr.

  ($\Rightarrow$ Stetigkeit der Funktionale, $\Leftarrow$ BaStei auf $\{\varphi_m: m \in M\}: X' \to \mathbb{K}$)

2 Dualität

Seien X, Y NRe.

2.1 Allgemeine Theorie

- *Definition:* $S^\perp$, ${}^\perp T$ abgeschlossen. $\perp$ verdreht $\subset$-Relationen.
  $[S]$ abg. $\Leftrightarrow {}^\perp(S^\perp) = [S]$.
- *Satz 2.2: Existenz des adjungierten Operators*
  $A \in L(X, Y)$
  $\Rightarrow \exists_1 A' \in L(Y', X'): \langle A x, y' \rangle = \langle x, A' y \rangle, \|A'\| = \|A\|$.
- *Satz 2.3: Eigenschaften des adjungierten Operators*

$A, B \in L(X, Y)$, $C \in L(W, X)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $\cdot'$ ist linear, $(AC)' = C'A'$,
- $N(A) = {}^{\perp}A'(Y)$, $N(A') = A(X)^{\perp}$,
- $\overline{A(X)} = {}^{\perp}N(A')$,

  $(\overline{A(X)} = {}^{\perp}(A(X)^{\perp}) = {}^{\perp}N(A'))$
- $A'(Y') \subset N(A)^{\perp}$.

- *Satz von der stetigen Inversen:*
  X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$ **bi**jektiv $\Rightarrow A^{-1}$ stetig.

- *Satz 2.5: Satz von der stetigen Inversen eingeschränkt*
  X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$ **in**jektiv $\Rightarrow A^{-1}$ stetig $\Leftrightarrow A(X)$ abg. (d.h. $A(X)$ BR)

  (S.v.d. stetigen Inversen$|_{A(X)}$)

- *Satz 2.6: Die kanonische Injektion*
  $A \in L(X, Y)$, $U \leqslant X$ abg.
  - $\hat{A} :=$ "$A/N(A)$" stetig, $\|\hat{A}\| = \|A\|$,
  - $\hat{A}$ offen $\Leftrightarrow A$ offen,
  - X, Y BRe $\Rightarrow A(X)$ abg. $\Leftrightarrow A$ offen.

- *Minimalmodul:* $A \in L(X, Y)$

$$\gamma(A) := \begin{cases} \inf_{x \notin N(A)} \frac{\|A x\|}{d(x, N(A))} & A \neq 0, \\ \infty & A = 0. \end{cases}$$

- *Satz 2.7: Charakterisierung der Abgeschlossenheit durch den Minimalmodul*
  X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$
  $\Rightarrow A(X)$ abg. $\Leftrightarrow \gamma(A) > 0$.

  $(\exists m > 0 : m\|x\| \leqslant \|\hat{A}x\| > 0)$

- *Satz 2.8: Abgeschlossen komplementierte Bildräume sind abgeschlossen*
  X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$, $Z \leqslant Y$ abg., $A(X) \oplus Z$ abg.
  $\Rightarrow A(X)$ abg.

  $(B : x + z \mapsto A x + z$, $B(X \times Z)$ abg., $\gamma(A) \geqslant \gamma(B))$

- *Satz von Kato:* X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$, $\operatorname{codim} A(X) < \infty$
  $\Rightarrow A(X)$ abg.

- *Satz 2.10: Abbildungseigenschaften der Adjungierten*
  X, Y **BR**e, $A \in L(X, Y)$
  $\Rightarrow A$ surjektiv $\Leftrightarrow A'$ injektiv, $(A')^{-1}$ stetig

  ($\Rightarrow$ indirekt: $\|A' y_n'\| < 1/n$, $\|y_n'\| = 1$, $z_n' := \sqrt{n} y_n'$ unbeschr., aber wegen BaStei beschr., Surjektivität geht wesentlich ein bei „z_n' für alle $x \in X$ beschränkt“ (vorher nur auf $A(X)$).
  $\Leftarrow$ indirekt, rumkugeln, Hahn-Banach.)

- *Satz 2.11: Abbildungseigenschaften der Adjungierten II*
  X, Y **NR**e, $A \in L(X, Y)$
  $\Rightarrow A'$ surjektiv $\Leftrightarrow A$ injektiv, A^{-1} stetig

  ($\Rightarrow$ s.o.
  $\Leftarrow$ Hahn-Banach)

- *Satz 2.12: Abgeschlossenheit des Bildes der Adjungierten*
  X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$

$\Rightarrow A(X)$ abg. $\Leftrightarrow A'(Y')$ abg.
Dann: $A(X) = {}^{\perp}N(A')$, $A'(Y') = N(A)^{\perp}$.

(Hahn-Banach + vorige Sätze)

- *Definition:* X BR: $L(X)^{-1}$
- *Satz 2.13:* X, Y BRe, $A \in L(X, Y)$
  - A bij. $\Leftrightarrow A'$ bij. Dann: $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.
  - $X = Y$: $A \in L(X)^{-1} \Leftrightarrow A' \in L(X')^{-1}$.
- *Definition:* $D(A)$ (UR!), Graph(A).
- *Definition:* $A: X \to Y$ abg.: $\Leftrightarrow$ Graph$(A) \leqslant X \times Y$ abg.
  stetig $\Rightarrow$ abg. $\Rightarrow N(A)$ abg.
- *Satz vom abgeschlossenen Graphen:* X, Y BRe
  - $A: D(A) \to Y$ abg. $\Rightarrow D(A)$ mit Graphennorm BR.
  - $B: X \to Y$ linear: B abg. $\Leftrightarrow B \in L(X, Y)$.

    (B mit Graphennorm stetig, Banachraum-Normen sind äquiv. $\Rightarrow$ B auch normstetig)
- *Satz 2.15:* X, Y BRe, $A: D(A) \to Y$ abg.
  - $A \neq 0$: $A(D(A))$ abg. $\Leftrightarrow \inf_{x \in D(A) \setminus N(A)} \|A x\| / d(x, N(A)) > 0$.
  - A injektiv, $A(D(A)) = Y \Rightarrow A^{-1} \in L(X, Y)$.

2.2 Hilberträume

$H, H_1, H_2, \ldots$ seien stets Hilberträume.

- *Darstellungssatz von Riesz:*
  $z \in H$, $f(x) := \langle x, z\rangle \Rightarrow f \in H'$, $\|f\| = \|z\|$,
  $f \in H' \Rightarrow \exists_1 z_f \forall x \in H: f(x) = \langle x, z_f\rangle$, $\|f\| = \|z_f\|$.
  HRe sind reflexiv.
- *Definition:* A^*.
- *Definition:*
  A symmetrisch: $\Leftrightarrow \langle A x, y\rangle = \langle x, A y\rangle$
  A selbstadjungiert: $\Leftrightarrow A$ stetig und symmetrisch.
- *Satz von Hellinger-Toeplitz:* $A: H \to H$ linear, symmetrisch $\Rightarrow A \in L(H)$.

3 Banachalgebren und Spektraltheorie

- *Definition:* $\mathfrak{A}$ Algebra: $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ VR über $\mathbb{K}$ mit assoziativem, skalar-durchlässigem, distributivem Produkt,
  $\mathfrak{A}$ normierte Algebra (NA), falls submultiplikativ,
  $\mathfrak{A}$ Banachalgebra (BA), falls $\mathfrak{A}$ NA und vollständig.
  a^n, Einselement $e \neq 0$, $\mathfrak{A}^{-1}$.
- *Satz 3.1: Norm des Einselements*
  $1 \leqslant \|e\|$.

  ($L_a(x) := a\,x \in L(\mathfrak{A})$, $\|L_a\|$ tut's.)

Ab hier sei $\mathfrak{A}$ NA mit $\|e\| = 1$.

- *Satz 3.2: Folgen und Reihen in Algebren*

$(a_n), (b_n) \subset \mathfrak{A}$, $a, b \in \mathfrak{A}$

- $a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a_n b_n \to a\, b$.
- $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant \|a\|$ ex.
- Ist obiger Limes < 1, so ist $e - a \in \mathfrak{A}^{-1}$ und die Neumannsche Reihe konv.:
$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

- *Satz 3.3: Offenheit von $\mathfrak{A}^{-1}$*
  $\mathfrak{A}$ BA
  - $a_0 \in \mathfrak{A}^{-1}$, $a \in \mathfrak{A}$, $\|a - a_0\| < \|a_0^{-1}\|^{-1}$
    $\Rightarrow a \in \mathfrak{A}^{-1}$, es gibt eine Abschätzung für $\|a^{-1} - a_0^{-1}\|$.
  - $\mathfrak{A}^{-1}$ offen, $a \mapsto a^{-1}$ stetig.
- *Definition:* $\mathfrak{A}$ BA
  $\rho(x) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda e - x \in \mathfrak{A}^{-1}\}$ *(Resolventenmenge)*,
  $r_\lambda(x) := (\lambda e - x)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(x)$ *(Resolvente)*,
  $\sigma(x) := \mathbb{K} \setminus \rho(x)$ *(Spektrum)*,
  $r(x) := \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. *(Spektralradius)*
- *Satz 3.4: Eigenschaften von Resolvente, Resolventenmenge, Spektrum*
  $\mathfrak{A}$ BA, $x \in \mathfrak{A}$
  - $\lambda_0 \in \rho(x)$, $|\lambda - \lambda_0| < \|r_{\lambda_0}(x)\|^{-1} \Rightarrow \lambda \in \rho(x)$,
  $$r_\lambda(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n r_{\lambda_0}(x)^{n+1},$$
    d.h. $\rho(x)$ offen,
  - *Resolventengleichung:* $\lambda, \mu \in \rho(x)$: $r_\lambda(x) - r_\mu(x) = -(\lambda - \mu) r_\lambda(x) r_\mu(x)$
  - $|\lambda| > r(x)$
    - $\lambda \in \rho(x)$,
    - $r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / \lambda^{n+1}$,
    - $\|r_\lambda(x)\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$.

      ($|\lambda| > r(x) \Rightarrow r(x)/|\lambda| < 1$. Also $e - x/\lambda \in \mathfrak{A}^{-1}$, d.h. $\lambda \in \rho(x)$.
      $r_\lambda(x) = \sum x^n / \lambda^{n+1}$. Abschätzen mit geom. Reihe.)
  - $\sigma(x) \subset U_{r(x)}[0_{\mathbb{K}}]$ kompakt,

      (abg. und beschr.)
  - $\mathfrak{A}$ komplex $\Rightarrow \sigma(x) \neq \emptyset$,

      ($\Phi \in \mathfrak{A}'$, $f(\lambda \in \rho(x)) := \Phi(r_\lambda(x))$ hat PR-Entw $\Rightarrow$ holomorph (s. Punkt 1), nimm an $\rho(x) = \mathbb{C}$, $|f(\lambda)| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|r_\lambda\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$, **Liouville**: f konstant. $\Phi(x^{-1}) = 0$ $(\lambda = 0) \Rightarrow x^{-1} = 0 \Rightarrow e = 0$. W!)
  - $\mathfrak{A}$ komplex $\Rightarrow r(x) = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$.

      ($\gamma := \max |\sigma(x)| \leqslant r(x)$. Nimm an $\gamma < r(x)$. $G := \{|\lambda| > \gamma\} \subseteq \rho(x)$. Gleiches $f(\lambda)$ wie oben. $f = 0$ bei $\infty \Rightarrow f$ hat **Laurentreihe** $f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / \lambda^n$ auf G.
      Andererseits $f(\lambda) = \Phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n)/\lambda^{n+1}$ auf Kreis außerhalb $r(x)$. Gleiche Laurentreihen: Zweite Id. auf ganz G.
      $\Phi(x^n)/\lambda^{n+1} \to 0$. Nun $\lambda \in G$ fest, dann jedes Φ auf x^n/λ^n beschr, also x^n/λ^n beschränkt. Dann $\|x^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda| \cdot \alpha^{1/n}$, also
      $r(x) \leqslant |\lambda|$ für alle $\lambda \in G \Rightarrow r(x) \leqslant \gamma < r(x)$. W!)

Ab hier sei X ein BR und H ein HR.

- *Operatorenalgebren:* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}: \lambda I - A \text{ bijektiv}\}$. Nach 2.13 $\rho(A) = \rho(A')$, $\sigma(A) = \sigma(A')$, $r(A) = r(A')$. Schreibe $R_\lambda(A) := r_\lambda(A)$. Für $\lambda \in \rho(A)$: $R_\lambda(A)' = R_\lambda(A')$.
  - $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$,
  - $r(A) = r(A^*)$,
  - $R_\lambda(A)^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*)$.
- *Definition:*
  - $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}: \lambda I - A \text{ nicht injektiv}\}$, *(Punktspektrum)*
  - $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}: \lambda \notin \sigma_p(A), (\lambda I - A)(X) \text{ echt dicht in } X\}$, *(kontinuierliches Spektrum)*
  - $\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}: \lambda \notin \sigma_p(A), \overline{(\lambda I - A)(X)} \neq X\}$. *(Residualspektrum)*
  - $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$. (disjunkt)
- *Definition:*
  - $x \in \mathfrak{A}$ idempotent: $\Leftrightarrow x^2 = x$,
  - $x \in \mathfrak{A}$ nilpotent: $\Leftrightarrow \exists n: x^n = 0$,
  - $x \in \mathfrak{A}$ quasinilpotent: $\Leftrightarrow r(x) = 0$.
- *Beispiel:* $A :=$ Linksshift im l^2. $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{K}: |\lambda| < 1\}$. $\sigma(A) \subset \bar{\mathbb{D}}$. $0 \in \sigma(A)$, da nicht surjektiv. Für A^* konstruierbar $(\lambda, \lambda^2, \ldots)$: $\mathbb{D} \subset \sigma(A^*) \subset \bar{\mathbb{D}}$, $\sigma(A^*)$ abg. $\Rightarrow$ Gleichheit. $\mathbb{D} = \sigma_p(A^*)$. $\sigma_p(A) = \emptyset$.
- *Definition:* $A \in L(H)$ normal: $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$.
- *Erinnerung:* Abgeschlossene URe von HRen sind stets komplementiert. (In BRen nicht im Allgemeinen der Fall)
- *Satz 3.5: Eigenschaften normaler Operatoren*
  $A \in L(H)$ normal
  - $\|Ax\| = \|A^*x\|$ $(x \in H)$, insbes. $N(A) = N(A^*)$,
    $H = \overline{A(H)} \oplus N(A)$,

    (Betrachte $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle$, $H(A) = \overline{A(H)} \oplus A(H)^\perp$)
  - $\lambda I - A$, A^n normal,
  - $\|A\| = r(A)$,

    $(\|A^2\| = \|A\|^2$ via IP zeigen, dann via $2^n)$
  - $\sigma_r(A) = \emptyset$,
  - A symmetrisch $\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

    (Wähle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Z.z. $\lambda \in \rho(A)$. $m := |\lambda - \bar{\lambda}| > 0$. Mittels Symmetrie, CSU, Δ-Ungleichung: $m/2\|x\|^2 \leqslant \|(\lambda I - A)x\|\,\|x\|$, also surjektiv mit stetiger Inverse.)
- *Satz von Gelfand-Mazur:* $\mathfrak{A}$ komplexe BA mit Eins e. $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathfrak{A} = [e]$.

  ($x \in \mathfrak{A}$. $\sigma(x) \neq \emptyset \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(x)$. $\lambda_0 e - x = 0 \Rightarrow \lambda_0 e = x$.)
- *Fortsetzung des obigen Beispiels:*
  $\sigma(A^*A) = \{1\} \neq \{0, 1\} = \sigma(AA^*)$. Also i.A. $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$.
- *Satz 3.7:* $\mathfrak{A}$ BA mit Eins, $x, y \in \mathfrak{A}$, $m \in \mathbb{N}$
  - $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$,

    ($\lambda \in \rho(yx)$, oBdA $\lambda = 1$. $z := (e - yx)^{-1}, a := e + xzy = (e - xy)^{-1}$.)

- $r(x\,y) = r(y\,x)$,

  $((x\,y)^{n+1} = x(y\,x)^n y.)$
- $r(x^n) = r(x)^n$.

- *Potenzreihen auf Banachalgebren:* Bedingung: $r(x) <$ Konvergenzradius der PR.
- *Satz 3.8(1,2):* $f(\lambda) = \sum a_n \lambda^n$ mit KR $r > 0$, $a_i \in \mathbb{K}$
  - X BR, $A \in L(X)$, $r(A) < r \Rightarrow (f(A))' = f(A')$.
  - H HR, $A \in L(H)$, $r(A) < r \Rightarrow (f(A))^* = \sum \overline{a_n} A^*$.
- *Satz 3.8(3):* $\mathfrak{A}$ BA mit Eins, $x, y \in \mathfrak{A}$, $x\,y = y\,x$
  - $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,

    (Binomi-Formel $(x + y)^n$)
  - $\exp(x) \in \mathfrak{A}^{-1}$, $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$

    ($y = -x$ oben)
- *Hilfssatz 3.9*: Z NR, $U \leqslant Z$ abg.
  - $(Z/U)' \cong U^{\perp}$,
  - $Z'/U^{\perp} \cong U'$,
  - $\dim Z = \dim Z'$.
- *Definition:* V, W VRe über $\mathbb{K}$, $A: V \to W$ linear
  - $\alpha(A) := \dim N(A)$, *(Nulldefekt)*
  - $\beta(A) := \operatorname{codim} A(V)$. *(Bilddefekt)*
- *Satz 3.10(1):* X BR, $A \in L(X)$, $A(X)$ abg. $\Rightarrow \alpha(A') = \beta(A)$ und $\beta(A') = \alpha(A)$.
- *Satz 3.10(2):* H HR, $A \in L(H)$, $A(H)$ abg. $\Rightarrow \alpha(A^*) = \beta(A)$ und $\beta(A^*) = \alpha(A)$.

4 Kompakte Operatoren

X, Y seien BRe.

- *Definition:* $K: X \to Y$ linear, K kompakt: $\Leftrightarrow$ $(x_n) \subset X$ beschränkt $\Rightarrow$ $(K\,x_n)$ enthält konvergente TF.
  $\mathcal{K}(X, Y) := \{K: X \to Y: K \text{ kompakt}\}$, $\mathcal{K}(X)$ analog.
  $\mathcal{F}(X, Y) := \{A \in L(X): \dim A(X) < \infty\}$, $\mathcal{F}(X)$ analog. *($L(X)$-Bedingung ist wesentlich!)*
- *Satz 4.1:* $\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Y) \subset L(X, Y)$

  (Angenommen, A sei unbeschr. Dann ex. x_n beschränkt mit $\|A\,x_n\| > n$. Konv. TF?!)
- *Definition:* Ideal in Algebra (UR mit $\mathfrak{A}I, I\mathfrak{A} \subset I$)
- $\mathcal{F}(X, Y)$ ist ein Ideal in $L(X, Y)$.
- *Satz 4.2(1,2):*
  - $\mathcal{K}(X, Y)$ ist abg. UR von $L(X, Y)$,

    ($(K_n) \subset \mathcal{K}(X,\ Y) \Rightarrow A$ (Normkonvergenz), $(x_n) \subset X$ beschränkt. Wähle aus $(K_1 x_n)$ konv. TF $(K_1 x_{1,n})$,

    Wähle aus $(K_2 x_{1,n})$ konv. TF $(K_2 x_{2,n})$, usw.

    Dann: $z_n := x_{n,n}$. Dann konvergiert $(K_\nu z_n)$, und (CF!) auch $(A\,z_n)$ konvergiert.)

  - $\mathcal{K}(X)$ ist abg. Ideal in $L(X)$.
- *Satz 4.2(3):* $K \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  - $\alpha(\lambda I - K) < \infty$,

    ($(x_n) \subset N(\lambda I - K)$ beschr. $\Rightarrow K x_n = \lambda x_n \Rightarrow (x_n)$ enthält konv. TF $\Rightarrow$ in $N(\lambda I - K)$ gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß.)

  - $(\lambda I - K)(X)$ abg.,

    (OBdA $\lambda = 1$. $S := I - A$. $\hat{S}^{-1}$ stetig: Angenommen nicht, dann $\exists (x_n) \subset X$: $\|x_n\|_{/N(S)} = 1$, $S x_n \to 0$. OBdA $\|x_n\| \leqslant 2 \Rightarrow$ TF $(K x_{n_k})$ konvergent. $x_{n_k} = (S + K) x_{n_k} \to x$, also $S x = 0 \Rightarrow \|x\|_{/N(S)} = 0$. Andererseits $\|x_n\|_{/N(S)} = \lim_{n \to \infty} \|x_{n_k}\|_{/N(S)} = 1$. W!)

  - $\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(K)$.

    (Nimm an $0 \in \rho(K)$. Dann $K^{-1} \in L(X)$, also auch $I = K^{-1} K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow$ In X gilt B-W $\Rightarrow \dim X < \infty$.)

- Beispiel: Integraloperatoren mit beschränktem, stetigen Kern sind auf $C[a, b]$ mit der Supremumsnorm kompakt. (Approximationssatz von Weierstraß: Endlichdimensional (mit Polynomen) approximierbar)
- *Satz von Schauder:* $K \in \mathcal{K}(X, Y) \Leftrightarrow K' \in \mathcal{K}(Y', X')$

  ($\Rightarrow$ $(y_n') \subset Y'$ beschr. $B := \overline{K(U_1[0])} \subset Y$ kompakt. y_n' als El. von $C(B)$ beschränkt, gleichgradig stetig $\Rightarrow$ (Arz-Asc) $\exists (y_{n_k}'|_B) \subset C(K)$ glm. konv.

  y_{n_k}' glmkonv $\Rightarrow y_{n_k}'$ CF $\Rightarrow T' y_{n_k}'$ CF.

  (Kompaktheit von K geht wesentlich ein, da Arz-Asc nur auf kompakten Räumen funktioniert)

  $\Leftarrow$ K'' kompakt nach $\Rightarrow$, $K'' \circ i_X (\to Y'')$ also auch, $K'' \circ i_X \to Y$ also auch.)

- *Definition:* V VR über $\mathbb{K}$, $P: V \to V$ linear. *P Projektor*: $\Leftrightarrow P^2 = P$.
- *Satz 4.4:* P Projektor auf V
  - $(I - P)^2 = I - P$
  - $P(V) = \{x \in V : Px = x\}$
    $N(P) = (I - P)(V)$
    $V = P(V) \oplus N(P)$
  - V NR, $P \in L(V) \Rightarrow P(V)$ abg., $\|P\| \geqslant 1$ falls $P \neq 0$.
- *Definition:* U UR von X. U heißt *stetig projizierbar (spbar)*: $\Leftrightarrow \exists P = P^2 \in L(X)$: $P(X) = U$.
- *Satz 4.5: Einige stetige projizierbare Räume*
  U, V URe von X, $A \in L(X)$
  - $\dim U < \infty \Rightarrow U$ spbar,
  - V abg., $\operatorname{codim} V < \infty \Rightarrow V$ spbar,
  - $X = U \oplus V$, U, V abg. $\Rightarrow U$, V spbar,
  - $\operatorname{codim} A(X) < \infty \Rightarrow$ A(X) spbar,
  - X HR: U abg. $\Leftrightarrow U$ spbar.
- *Satz 4.6:* $K \in \mathcal{K}(X)$, E Eigenwerte von K, $|E| > r$
  - $(K - \lambda I)(X) \neq X$ $(\lambda \in E)$
  - E endlich

(Falls 1 oder 2 falsch $\Rightarrow$ (z.z., s.u.)$\exists M_n < X$ abg., $\lambda_n \in E$ mit

- $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$,
- $K(M_n) \subset M_n$,
- $(K - \lambda_n I)(M_n) \subset M_{n-1}$.

Riesz' Lemma: $\exists y_n \in M_n$: $\|y_n\| = 2$, $d(y_n, M_{n-1}) \geqslant 1$. Nun $2 \leqslant m < n$. $z := K y_m - (K - \lambda_n I) y_n \in M_{n-1}$. Dann $\|K y_n - K y_m\| = \|\lambda_n y_n - z\| > r$. Dann ist K nicht kompakt.

1 falsch $\Rightarrow \exists \lambda \in E$: $(K - \lambda I)(X) = X$. $M_n := N((K - \lambda I)^n)$.

2 falsch $\Rightarrow$ Dann ex. Folge $(\lambda_n) \subset E$ von EWen mit EVen (e_n). $M_n := \{e_1, \ldots, e_n\}$.)

- *Satz von Riesz:* $K \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  $\Rightarrow \alpha(K - \lambda I) = \beta(K - \lambda I) = \alpha(K' - \lambda I') = \beta(K' - \lambda I') < \infty$.

  (OBdA $\lambda = 1$. $S := I - K$. $\alpha < \infty$ wg. 4.2(3). Wg. 4.2(3) $S(X)$ abg., also $\beta' = \alpha$, $\alpha' = \beta$. $\alpha \leqslant \beta$ genügt.

  Nimm an $\beta < \alpha < \infty$.

$$X = \underbrace{N(S)}_{\dim = \alpha} \oplus E = S(X) \oplus \underbrace{F}_{\dim = \beta}.$$

  π Projektion(!) auf $N(S)$. $\varphi: N(S) \to F$ surj, nicht inj(!). $\Phi := K + \varphi\pi$ kompakt(!). $(\Phi - \lambda I) = S + \varphi\pi$. $(S + \varphi\pi)(E) = S(X)$. $(S + \varphi\pi)(N(S)) = F$. Also $(\Phi - \lambda I)(X) = (S + \varphi\pi)(X) = X$.

  Andererseits sei $x \in N(\varphi) \cap N(S)$. $\Phi x = (K + \varphi\pi)x = K x = \lambda x$. Dann kann aber wegen 4.6 $(\Phi - \lambda I)(X)$ nicht ganz X sein.)

- *Fredholmsche Alternative:* $K \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  - Entweder $\lambda x - K x = 0$ nur trivial lösbar (dann $\lambda x - K x = y$ eindeutig lösbar)
  - oder $\lambda x - K x = 0$ hat $n = \alpha(K - \lambda I)$ lin. unabh. Lösungen (die adj. Gleichung auch), und die inhomogene Gleichung ist lösbar $\Leftrightarrow y \in {}^{\perp}N(\lambda - T')$.
- *Satz 4.8:* $K \in \mathcal{K}(X)$
  - $\lambda_0 \in \sigma(K) \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma_p(K)$ und ist dort isolierter Punkt,

    (isolierter Punkt, weil sonst W! zu 4.6)
  - $\sigma(K)$ ist höchstens abzählbar,
  - 0 ist einziger HP von $\sigma(K)$.
- *Hilfssatz:* $A \in L(X, Y)$, $A(X)$ abg.
  $\Rightarrow \exists \gamma > 0 \forall y \in A(X) \exists x \in X: A x = y, \|x\| \leqslant \gamma \|y\|$

  (S.v.d. stetigen Inversen+Lemma von Riesz)
- *Satz 4.9:* $K \in \mathcal{K}(X)$
  $\Rightarrow K(X)$ abg. $\Leftrightarrow K \in \mathcal{F}(X)$

  (Wegen des HSs gilt in $K(X)$ Bolzano-Weierstraß)
- *Satz von Weyl:* $A, B \in L(X)$, $A - B$ kompakt
  $\Rightarrow \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subseteq \sigma(B)$

  ($\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$, Annahme: $\lambda \in \rho(B)$. $K := (\lambda I - B)^{-1}(A - B)$ kompakt.

$$\underbrace{\lambda I - A}_{\notin L(X)^{-1}} = \underbrace{(\lambda I - B)}_{\in L(X)^{-1}} \underbrace{(I - K)}_{\Rightarrow \notin L(X)^{-1}}.$$

  Wg. 4.8 $1 \in \sigma_p(K)$, d.h. $\exists x \neq 0$: $(I - K)x = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$.

W! zu $\lambda \notin \sigma_p(A)$.)

- Für Hilberträume ersetze in diesem Kapitel λ für Spektralwerte von Adjungierten durch $\bar{\lambda}$.

5 Unbeschränkte Operatoren

X sei stets ein BR, $D(A)$ ein UR von X und $A: D(A) \subset X \to X$ linear.

- *Bemerkungen:*
  - Ist A injektiv, so ex. $A^{-1}: A(D(A)) \to X$.
  - $D(A)$ abg., A abg. $\Rightarrow A$ stetig.
  - A abg. $\Rightarrow N(A)$ abg., $\lambda I - A$ abg.
- *Satz 5.1:* A abg.
  - A injektiv $\Rightarrow A^{-1}$ abg.
  - A bijektiv $\Rightarrow A^{-1} \in L(X)$.

    (2.15(2))
- *Definition:* Punktspektrum, Resolventenmenge, Resolvente (bijektiv!), $\sigma := \mathbb{K} \setminus \rho$.
- *Beispiele:* $A f := f'$ auf $C[0,1]$ mit Supnorm. $D(A) \subseteq C^1[0,1]$
  - $D(A) = C^1[0,1]$: $\sigma_p = \mathbb{K}$ wg. $e^{\lambda t}$.
  - $D(A) = C^1[0,1] \cap \{f(0) = 0\}$:
    A abg. EWP $\lambda f - f' = g$ eindeutig lösbar (Picard-Lindelöf, d.h. keine nichttriviale homogene Lösung) $\Rightarrow \rho(A) = \mathbb{K}$.
  - $D(A) = C^1[0,1] \cap \{f(0) = f(1)\}$:
    $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\sigma_p(A) = \{0\}$. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\sigma_p(A) = 2\pi i \mathbb{Z}$. $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.
  - $D(A) = C^1[0,1] \cap \{f(0) = f(1) = 0\}$:
    $\sigma_p(A) = \emptyset$, $\sigma(A) = \mathbb{K}$.
- *Satz 5.2:* A abg.
  - Die Resolventengleichung gilt weiterhin.
  - $\rho(A)$ offen, $\sigma(A)$ abg.

    ($\lambda_0 \in \rho(A)$. OBdA $\lambda_0 = 0$. $S := R_{\lambda_0}(A) = -A^1$. Wg. 5.1 $S \in L(X)$.
    Sei $|\lambda| < \|S\|^{-1}$, also $\|\lambda S\| < 1$. Dann ist $I + \lambda S \in L(X)^{-1}$.

    $$\underbrace{-A}_{\text{bij.}}\underbrace{(I + \lambda S)}_{\text{bij.}} = \lambda I - A.)$$
- *Definition:*
  - A dicht definiert: $\Leftrightarrow \overline{D(A)} = X$.
  - $D(A') := \{x' \in X' : \exists y' \in X' : \langle A x, x' \rangle = \langle x, y' \rangle\}$ (eindeutig, falls dicht definiert)
  - Für dicht def. A definiere die Adjungierte wie naheliegend.
- *Satz 5.3:* A dicht def. $\Rightarrow A'$ abg.
- *Satz 5.4:* A abg., dicht def.
  - A bijektiv $\Leftrightarrow A'$ bijektiv. Dann $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

    ($\Rightarrow A$ bij $\Rightarrow$ Wg. 5.1 ist $A^{-1} \in L(X)$, wg. 2.13 $(A^{-1})' \in L(X')$. Dann nachrechnen: $(A^{-1})' A' = I_{D(A')}$, $(A^{-1})'$ surjektiv.
    $\Leftarrow A'$ bij. $\Rightarrow$ (5.3) A' abg. $\Rightarrow$ (5.1)$(A')^{-1} \in L(X')$, $c := \|(A')^{-1}\|$.

Sei $x \in D(A)$. Mit Hahn-Banach: $\exists y' \in X'$: $\|y'\| = 1, y'(x) = \|x\|$.

$$\|x\| = \langle x, y' \rangle \leqslant c\|A\, x\|.$$

$\Rightarrow$ A injektiv und wg. 2.15 $A(D(A))$ abg. Wegen A' injektiv gilt $(A(D(A))^{\perp} = \{0'\}$. Wegen Abg.heit ist also A surj.)

- ◦ $\rho(A) = \rho(A')$, $\sigma(A) = \sigma(A')$, $R_\lambda(A') = R_\lambda(A)'$ $(\lambda \in \rho(A))$
- Analog für Hilberträume, mit komplexer Konjugation überall.

6 Halbgruppen

nö.

7 Vektorwertige holomorphe Funktionen

Sei X komplexer BR, $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \to X$

- *Definition:* f in $\lambda_0 \in D$ diffbar, Ableitung, f', holomorph, höhere Ableitung
  f auf D schwach holomorph: $\Leftrightarrow \forall x' \in X': x' \circ f: D \to \mathbb{C}$ holomorph auf D
- *Satz 7.1:* f schwach holomorph auf $D \Rightarrow f$ auf G holomorph

  (Nimm Kreis γ um $\lambda_0 \in D$ (offen!). $K := |\gamma|$. $\varphi := x' \circ f$. φ auf K beschränkt $\Rightarrow |f(K)| \leqslant C$. CIF:

  $$(\varphi \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

  Nach cleveren Termumformungen beschränkt das den Unterschied zweier Differenzenquotienten

  $$\left| \varphi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} \right) \right| \leqslant \frac{4\|\varphi\||C}{r^2} |z - w|.)$$

- *Satz 7.2: Schwache Konvergenz reicht für starke woanders*
  $(a_n) \subset X$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $r := |\lambda_0 - \lambda_1| > 0$. $\forall x' \in X'$: $\sum x'(a_n)(\lambda_1 - \lambda_0)^n$ konvergent
  $\Rightarrow \sum \|a_n\||\lambda - \lambda_0|^n$ und $\sum a_n |\lambda - \lambda_0|^n$ konv. für alle $\lambda \in U_r(\lambda_0)$.

  (schwache Beschränktheit $\Rightarrow$ Norm-Beschränktheit, geom. Reihe)

- *Satz 7.3: Potenzreihen sind unendlich oft differenzierbar*
  $(a_n) \subset X$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $\forall x' \in X', \lambda \in U_r(\lambda_0)$: $\sum x'(a_n)(\lambda - \lambda_0)^n$ konv.
  $f: U_r(\lambda_0) \to X$ definiert durch $f(\lambda) := \sum a_n(\lambda - \lambda_0)^n$
  $\Rightarrow f$ auf $U_r(\lambda_0)$ bel. oft db. und

  $$f^{(n)}(\lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} (k - n + 1) \cdots k\, a_k (\lambda - \lambda_0)^{k-n}. \quad (n \in \mathbb{N}, \lambda \in U_r(\lambda_0), a_n = f^{(n)}(\lambda_0))$$

- *Definition:* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifizierbarer Weg, $g: |\gamma| \to X$ stetig. $Z = \{t_0, ..., t_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$ und ζ passend zu Z. $\sigma(q, Z, \zeta)$ wie üblich. $|\gamma|$ der *Bogen*.
  Wie in Ana: $\exists_1 S \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\|\sigma(g, Z, \zeta) - S\| < \varepsilon$ für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $|Z| < \delta$ und jedes zu Z passend ζ. Setze

  $$\int_\gamma g(\lambda) d\lambda := \int_a^b g(\gamma(t)) d\gamma(t) := S.$$

  (Rektifizierbarer Weg: Weglängenapproximation für jede Zerlegung beschränkt. Effektiv: BV)

- *Satz 7.4: Grundlegende Eigenschaften des Integrals*
  γ, g wie oben. $h, g_1, g_2, \ldots: |\gamma| \to X$ stetig, Y, Z weitere stetige BRe, $A \in L(X, Y)$, $x' \in X'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  - Die Integrale sind linear,
  - konvergiert die Funktionenfolge glm., so darf man lim und $\int$ vertauschen,
  - $A(\int \ldots) = \int A(\ldots)$,
    $x'(\int \ldots) = \int x'(\ldots)$,
  - $X = L(Z)$, $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int g(\lambda) d\lambda \in L(Z)$, $\left(\int_\gamma g(\lambda) d\lambda\right)(z) = \int_\gamma g(\lambda)(z) d\lambda$.
- *Definition:*
  - $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ rb Weg, $z \in |\gamma|$
    $$u(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\lambda - z} d\lambda.$$
    (Umlaufzahl von γ um z)
  - $\gamma_1, \ldots, \gamma_n: [a, b] \to D$ geschlossene und rb'e Wege. $\Gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ ein *Zykel* in D.
    $|\Gamma| := \bigcup_{\nu=1}^n |\gamma_\nu|$.
    $u(\Gamma, z) := \sum_\nu u(\gamma_\nu, z)$
    $\int f d\Gamma := \sum_\nu \int f d\gamma_\nu$.
  - Γ *nullhomolog* in D: $\Leftrightarrow u(\Gamma, z) = 0$. $(\forall z \notin D)$
- *Cauchyscher Integralsatz:* $f: D \to X$ holomorph
  - Γ_1, Γ_2 Zykel in D mit $u(\Gamma_1, z) = u(\Gamma_2, z)$ für $z \notin D$
    $$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda) d\lambda.$$
    $(x' \in X'.\ x'(\int_{\Gamma_1} \ldots) = \int_{\Gamma_1} x'(\ldots) \underset{\text{FT}}{=} \int_{\Gamma_2} x'(\ldots) = x'(\int_{\Gamma_2} \ldots).)$
  - Γ nullhomologer Zykel $\Rightarrow \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda = 0$.
    (wie (1))
- *Satz 7.6:* $f: D \to X$ schwach holomorph, $\lambda_0 \in D$, $r > 0$, $U_r[\lambda_0] \subset D$, $\gamma(t) := \lambda_0 + r e^{it}$.
  - $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda$ existieren,
    ($f(\lambda)$ holomorph, also stetig.)
  - $f(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n (\lambda - \lambda_0)^n$ für $\lambda \in U_d(\lambda_0)$, $d := d(\lambda_0, \partial D)$,
    (übertrage wie CIS)
  - $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}} d\lambda$ für $z \in U_r(\lambda_0)$ und $n \in \mathbb{N}$.
- *Satz 7.7: Satz von Liouville*
  $f: \mathbb{C} \to X$ beschränkt und holomorph $\Rightarrow f$ konstant.
- *Satz 7.8: Laurententwicklung*
  $r > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $D := \{0 < |\lambda - \lambda_0| < r\}$. $f: D \to X$ holomorph auf D, $0 < \rho < r$, $\gamma(t) := \lambda_0 + \rho e^{it}$.
  $$\begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \quad (n \geqslant 0) \\ b_n &:= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} d\lambda, \quad (n \geqslant 1) \\ \Rightarrow f(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty a_n (\lambda - \lambda_0)^n + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{(l - \lambda_0)^n}. \quad (\lambda \in D) \end{aligned}$$

- *Definition:* Arten von Singularitäten (anhand von (b_i)).
- *Satz 7.9:* $\mathfrak{A}$ BA mit Einsel. $e \neq 0$, $x \in \mathfrak{A}$, $f(\lambda) := r_\lambda(x)$ für $\lambda \in \rho(x)$
  - f holomorph auf $\rho(x)$,
    $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \, r_\lambda^{n+1}(x)$,

    (Resolventengleichung gibt Differenzenquotient, Induktion)
  - λ_0 isolierter Punkt von $\sigma(x) \Rightarrow \lambda_0$ Pol oder wes. Sing. von f.

    (Annahme: hebbar. Dann ist f ganz normale PR $\Rightarrow r_\lambda(x) \to a_0$ für $\lambda \to \lambda_0$.

    $$(\lambda e - x) r_\lambda(x) = e \to (\lambda_0 e - x) a_0 = e,$$

    also $\lambda_0 \in \rho(x)$.)

8 Der Dunfordsche Funktionalkalkül

Sei $\mathfrak{A}$ komplexe BA mit Eins $e \neq 0$.

- *Satz 8.1: Funktionsauswertung über CIF und PR ergeben das gleiche*
  $x \in \mathfrak{A}$, $r > 0$, $r(x) < \rho < r$, $f\colon U_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, def. durch $f(\lambda) = \sum \alpha_n \lambda^n$, $\sigma(x) \subset U_{r(x)}[0] \subsetneq U_\rho[0] \subsetneq U_r[0]$, $\gamma := \rho e^{\mathrm{it}} (\Rightarrow |\gamma| \subset \rho(x))$.

  $$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) r_\lambda(x) d\lambda = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

  (**Idee:** r_λ in PR entwickeln, nachrechnen.
  $\lambda \in \rho(x) \Rightarrow (3.4) r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^\infty x^n / \lambda^{n+1}$ glm ($\int \leftrightarrow \sum$!).
  $k \in \mathbb{N}_0$.

  $$\int_\gamma \lambda^k r_\lambda(x) d\lambda = \int_\gamma \lambda^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda^{n+1}} x^n d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{1}{\lambda^{n+1-k}} d\lambda x^n = 2\pi i \, x^k.$$

  f-Def einsetzen, oben benutzen:

  $$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n r_\lambda(x) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_\gamma \lambda^n r_\lambda(x) d\lambda = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n.)$$

- *Definition:* $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $D \subset \mathbb{C}$ offen. Zykel Γ *zulässig für (K,D)*: $\Leftrightarrow |\Gamma| \cap K = \emptyset$, Γ in D nullhomolog, $u(\Gamma, z) = 1$ $(z \in K)$. (ohne Beweis: $\exists$.)
- *Definition:* $x \in \mathfrak{A}$. $\mathcal{H}(x) := \{f\colon D_f \to \mathbb{C}\colon f \text{ holomorph auf } D_f, D_f \text{ offen}, \sigma(x) \subset D_f\}$.
  $f \in \mathcal{H}(x)$, Γ für $(\sigma(x), D_f)$ zulässig. Dann

  $$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) r_\lambda(x) d\lambda. \quad (\in \mathfrak{A})$$

- *Bemerkungen:*
  - Wg. CIS ist $f(x)$ unabh. von der Auswahl des Zykels,
  - 8.1 gilt für jeden zul. Zykel, nicht notwendig kreisförmig,
  - $f \in \mathcal{H}(x)$, $D \subset D_f$ offen, $\sigma(x) \subset D$, $g := f|_D$. Dann $g \in \mathcal{H}(x)$, $g(x) = f(x)$,
  - $f, g \in \mathcal{H}(x)$, $f = g$ auf $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, dann $f(x) = g(x)$.
- *Satz 8.2: CIF und Resolvente(-npotenzen) stimmen überein*
  $x \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \rho(x)$, Γ für $(\sigma(x), \mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$ zulässig

  $$\Rightarrow (\alpha e - x)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n r_\lambda(x) d\lambda. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(**Idee:** Induktion via Resolventengleichung
$n \geqslant 0$: Satz 8.1. Also oBdA $n < 0$. Weiter $u(\Gamma, \alpha) = 0$ (Teil der Bed. für Zulässigkeit!)

$$\begin{aligned} I_n &:= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n r_\lambda(x)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n (r_\alpha(x) + (\alpha-\lambda) r_\alpha(x) r_\lambda(x))d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} r_\alpha(x)\left[\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n d\lambda + \int_\Gamma (\alpha-\lambda)^{n+1} r_\lambda(x) d\lambda\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} r_\alpha(x)\left[\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n d\lambda\right]}_{=0} + (\alpha e - x)^{-1} I_{n+1}.) \end{aligned}$$

- *Satz 8.3:* $x \in \mathfrak{A}$, R rat. Fkt. mit PBZ
$$R(\lambda) = p(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k}(\alpha_m - \lambda)^{-k}$$
und $\{\alpha_n\} \subset \rho(x)$.
$\Rightarrow R(x) \in \mathcal{H}(x)$,
$$R(x) = p(x) + \sum_{m,k} c_{m,k}(\alpha_m e - x)^{-k}.$$
- *Satz 8.4:* $x \in \mathfrak{A}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f, f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf D. $\sigma(x) \subset D$. ($\Rightarrow f, f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{H}(x)$) $f_n \to f$ auf D lokal glm
$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$.

    ($f_n(\lambda) r_\lambda(x)$ konv glm., dann Satz 7.4)
- *Satz 8.5:* X komplexer BR, $A \in L(X)$, $f \in \mathcal{H}(A)$.
$\Rightarrow f \in \mathcal{H}(A')$, $f(A') = (f(A))'$.
- *Approximationssatz von Runge:* $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph
$\Rightarrow \exists$ rationale Fktfolge (r_n), deren Pole in $\mathbb{C} \setminus D$ liegen und $r_n \to f$ glm.
- *Satz 8.6:* $x \in \mathfrak{A}$, $f, g \in \mathcal{H}(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
    - $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}(x)$,
    $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$,
    $D_{\alpha f + \beta g} = D_f \cap D_g$,
    - $fg \in \mathcal{H}(x)$,
    $(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x)$,
    $D_{fg} = D_f \cap D_g$,

        (Für rat. Fkt. f, g ist die Beh. 8.3, ansonsten 8.3, 8.4 und der Satz von Runge)
    - $f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow 1/f \in \mathcal{H}(x)$,
    $f(x) \in \mathfrak{A}^{-1}$, $f(x)^{-1} = (1/f)(x)$,

        (checke Bedingungen für $1/f \in \mathcal{H}(x)$. Mit (2) folgt der Rest.)
    - $y \in \mathfrak{A}$, $xy = yx \Rightarrow y f(x) = f(x) y$.

        (x kommutiert, $r_\lambda(x)$ für $\lambda \in \rho(x)$ auch, da als PR in x darstellbar)
- *Satz 8.7: Spektraler Abbildungssatz*
$x \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathcal{H}(x)$
    - $f(x) \in \mathfrak{A}^{-1} \Leftrightarrow f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(x)$,

        ($\Rightarrow f(z_0) = 0 \Rightarrow \exists h \in \mathcal{H}(x)$: $(z - z_0)h(z) = f(z)$. $x - z_0 e$ ist nicht invertierbar, also $f(x)$ auch nicht,

$\Leftarrow$ 8.6(3))

- $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$,

  ($\lambda \in \sigma(f(x)) \Leftrightarrow \lambda e - f(x) \notin \mathfrak{A}^{-1} \Leftrightarrow f - \lambda$ hat Nullstelle in $\sigma(x) \Leftrightarrow f(\sigma(x)) - \lambda \ni 0$.)

- $r(f(x)) = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |f(\lambda)|$,

  (klar nach (1))

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ auf $\sigma(x)$.

  ($\Rightarrow f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) = \sigma(0) = \{0\}$.)

- *Beispiel:* Für $C[0, 1]$ mit der Sup-Norm sei $A\varphi(t) := \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$. $\sigma(A) = \{0\}$, $\sigma_p = \emptyset$. Mit $f = 1$: $f(A) = I$, $\sigma_p(f(A)) = \{1\} \neq f(\sigma_p(A))$.
- *Satz 8.8: Spektraler Abbildungssatz für σ_p*
  X komplexer BR, $A \in L(X)$, $f \in H(A)$
  - $f(\sigma_p(A)) \subset \sigma_p(f(A))$,

    (α EW von A mit EV x. D.h. $\exists g \in \mathcal{H}(A)$: $f(z) - f(\alpha) = g(z)(z - \alpha)$, und $f(A) - f(\alpha)I = g(A)(A - \alpha I)$, also $(f(A) - f(\alpha))x = 0$.)

  - f auf keiner Zusammenhangskomponente von D_f konstant $\Rightarrow$ Gleichheit

    (**Idee:** Urbildmenge von jedem Wert endlich, also rausdividierbar $\alpha \in \sigma_p(f(A)) \subset \sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \Rightarrow f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ endlich. Dann $\exists g \in \mathcal{H}(A), \zeta_1, ..., \zeta_n$: $f(z) - \alpha = g(z)(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$, $g(A) \in L(A)^{-1}$ (g hat keine Nullstellen mehr in $\sigma(A) \Rightarrow g(A)$ muss injektiv sein). Da $f(A) - \alpha I$ nicht injektiv ist, muss einer der $(A - \zeta_j I)$-Faktoren schuldig sein. Damit $\alpha \in f(\sigma_p(A))$.)

- *Satz 8.9: Verkettung von Funktionen*
  $x \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathcal{H}(x)$, $g \in \mathcal{H}(f(x))$
  - $D := f^{-1}(D_g)$ ist offen und $\sigma(x) \subset D$,

    ($\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow f(\lambda) \in f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) \subset D_g$)

  - $h: D \to \mathbb{C}$ def. durch $h := g \circ f \Rightarrow h \in \mathcal{H}(x)$, $h(x) = g(f(x))$.

    ((1) $\Rightarrow h \in \mathcal{H}(x)$. Konstruiere offene Menge $W \subset D$, so dass ein Zykel Γ_0 zul. für $(\sigma(x), D_f)$ und $(\sigma(x), W)$ ist. Für $\xi \in \rho(f(x))$ existiert $r_\xi(f(x))$ (verwende $1/(\xi - f)$). Dann CIF.)

9 Kompakte Operatoren auf Hilberträumen

H sei stets ein HR.

- *Definition:* X BR, $T \in A(X)$
  $\sigma_{\text{ap}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}: \exists (x_n) \subset X: \|x_n\| = 1, (\lambda I - A)x_n = 0\}$.
- *Satz 9.1:* $A \in L(H)$ normal
  - $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in H$, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y \Rightarrow A^* x = \bar{\lambda} x$, $\langle x, y \rangle = 0$,
  - $\sigma(A) = \sigma_{\text{ap}}(A)$

    ($\supset$ Nimm an $\lambda \in \sigma_{\text{ap}} \cap \rho$. Dann $\lambda I - A^{-1}$ stetig. W! zu Def von σ_{ap} $\subset \sigma_r = \emptyset$ wg 3.5. Also betrachte $\lambda \in \sigma_c$?)

  - $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$,
  - A symmetrisch $\Rightarrow \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$,

$(\overline{\langle x, A\,x\rangle} = \langle A\,x, x\rangle = \langle x, A^* x\rangle = \langle x, A\,x\rangle)$

- A symmetrisch, kompakt, $A \neq 0$
  - $-\|A\| \in \sigma_p(A)$ oder $\|A\| \in \sigma_p(A)$.

    (Es gibt eine Folge, die gegen das Supremum aus (3) konvergiert. Grenzwert nehmen, rechnen, fertig (OBdA lim $A\ x_n \neq 0$))
  - $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \langle A\,x, x\rangle$,
  - $\sigma_p(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$,

    (z.B. $\|A\|$.)
  - $U \leqslant H$ abg., $A(U) \subset U \Rightarrow A|_U$ symmetrisch, kompakt

- *Entwicklungssatz 9.2:*
  $A \in L(H)$ symmetrisch und kompakt, $A \neq 0$, $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ (beachte 4.8) absteigend dem Betrag nach sortiert
  $\Rightarrow$ Ist $\sigma_p(A) \setminus \{0\}$ unendlich [endlich], so gibt es ein unendliches [endliches] ONS (u_i) mit $A\,u_n = \lambda_n u_n$ und $A\,x = \sum_k \lambda_k \langle x, u_k\rangle u_k$ für alle $x \in H$.
  Im unendlichen Fall $\lambda \to 0$. (4.8)

  (**Idee:** Eigenvektoren rausschnipseln, dann wieder $\|A\|$.
  $H_1 := H$, $A_1 := A$. 9.1(5) $\Rightarrow \exists u_1 \in H_1$: $A_1 u_1 = \|A_1\| u_1$. $H_2 := [u_1]^\perp$, usw.
  Fall 1: bricht ab. Dann $\exists m$: $A_{m+1} = 0$, $A_m \neq 0$. (Zur Norm ex. immer ein EV!) Subtrahiere alle u_i-Anteile raus, dann bleibt etwas in $N(A)$ übrig. Also kann man $A\,x$ aus den u_i konstruieren.
  Fall 2: bricht nicht ab. Wie oben, Besselsche Ungleichung hilft.
  Hätten wir ein $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ vergessen, dann wäre es im Bild und somit nach Fall 2 platt.)

- *Definition: A positiv* $(A \geqslant 0)$: $\Leftrightarrow \langle A\,x, x\rangle \geqslant 0$ für alle $x \in H$.

- *Satz 9.3:* $A \in L(H)$ symmetrisch, kompakt, $A \neq 0$, $A \geqslant 0$
  $\Rightarrow$ die λ_j aus 9.2 sind > 0. (merke: $\lambda_j = 0$ kommen dort nicht vor)

  $(\lambda_j = \langle A\,u_j, u_j\rangle \geqslant 0.)$

- *Satz 9.4:* Vor. wie 9.2
  $\Rightarrow \{u_1, u_2, \ldots\}$ ONB von $\overline{A(H)}$

- *Satz 9.5:* $K \in \mathcal{K}(H) \setminus \{0\}$
  $\Rightarrow \exists (\mu_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$, $(u_n), (v_n) \subset H$ ONSe (evtl. endlich) mit

  $$K\,x = \sum \mu_n \langle x, u_n\rangle v_n,$$

  $\mu_n \to 0$ falls unendlich.

  (Ähnlichkeit zur SVD! $A := K^* K$ kompakt, symmetrisch, positiv, $N(A) \subset N(K)$. $\Rightarrow$ (9.2,9.3) $A\,x = \sum_k \lambda_k \langle x, u_n\rangle u_n$, $\lambda_k \geqslant 0$.
  $\mu_n := \sqrt{\lambda_k}$. $v_n := 1/\mu_n K\,u_n$. (ONS!) $H = N(A) \oplus \overline{A(H)}$.)

- *Hilfssatz 9.6:* X NR, $J \neq \{0\}$ Ideal in $L(X)$
  $\Rightarrow \mathcal{F}(X) \subset J$.

  (OBdA reicht es $\{\dim A(X) = 1\} \subset J$ zu zeigen. Sei also $\dim A(X) = 1$. Nimm ein $T \neq 0$. Mit Hahn-Banach konstruiere $S, R \in \mathcal{F}(X)$, so dass $A = S\,T\,R$.)

- *Satz 9.7:* $J \neq \{0\}$ Ideal in $L(H)$
  - $\mathcal{F}(H) \subset J$,

- $\overline{\mathcal{F}(H)} = \mathcal{K}(H)$,

  ($\subset$:$\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{K}(H) \Rightarrow \overline{\mathcal{F}(H)} \subset \overline{\mathcal{K}(H)} = \mathcal{K}(H)$.
  $\supset$: $K \in \mathcal{K}(H)$. Benutze Zerlegung nach 9.5, Normkonvergenz von abgeschnittener Summe von dort gegen K nachrechnen.)

- J abg. $\Rightarrow \mathcal{K}(H) \subset J$.

10 Symmetrische Operatoren

H Hilbertraum, A: $H \to H$ linear und symmetrisch, also nach Hellinger-Toeplitz stetig. Dann auch $A = A^*$.

$$4\langle T x, y\rangle = \langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle + i\langle T(x + i y), x + i y\rangle - i\langle T(x - i y), x - i y\rangle \quad (1)$$

wegen

$$\langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle = 2\langle T x, y\rangle + 2\langle T y, x\rangle$$

und

$$i(\langle T(x + i y), x + i y\rangle - \langle T(x - i y), x - i y\rangle) = -2\langle T y, x\rangle + 2\langle T x, y\rangle.$$

(Dies dient dazu, aus $\langle A x, x\rangle$ $\langle A x, y\rangle$ machen zu können.)

- *Satz 10.1:* $A, B \in L(H)$ symmetrisch
  - *Verallgemeinerte CSU:* $A \geqslant 0$
    $\Rightarrow |\langle A x, y\rangle|^2 \leqslant \langle A x, x\rangle\langle A y, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.
  - $A = B \Leftrightarrow \langle A x, x\rangle = \langle B x, x\rangle$ für alle $x \in H$

    (Symmetrie ist essentiell. $A - B$ sym, $\langle T x, x\rangle = 0 = \|T\|$.)

- *Satz 10.2:* H komplex, $A, B: H \to H$ linear
  - A symmetrisch $\Leftrightarrow \langle A x, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$,

    ($\Leftarrow$: $\langle A x, x\rangle = \langle x, A x\rangle$. Dann (1) $\Rightarrow \langle A x, y\rangle = \langle x, A y\rangle$ (in allen Teiltermen A rüberbringen))
  - $A = B \Leftrightarrow \langle A x, x\rangle = \langle B x, x\rangle$ für alle $x \in H$

    ($\Leftarrow$: $\langle A x, x\rangle = \langle B x, x\rangle \Rightarrow \langle A x, y\rangle = \langle B x, y\rangle \Rightarrow \langle (A - B)x, y\rangle = 0$ für alle x, y.)

- *Satz 10.3:* $A, B \in L(H)$ symmetrisch
  - $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A + \beta B$ symmetrisch,
  - A^* symmetrisch,
  - $A B$ symmetrisch $\Leftrightarrow A B = B A$.
- *Definition:* $A, B \in L(H)$ symmetrisch. $A \leqslant B \Leftrightarrow B - A \geqslant 0$. (impliziert $\|A\| \leqslant \|B\|$)
- *Definition:* $A \in L(H)$ symmetrisch.
  $m(A) := \inf_{\|x\|=1} \langle A x, x\rangle$,
  $M(A) := \sup_{\|x\|=1} \langle A x, x\rangle$.
  Dann: $-\|A\| \leqslant m(A) \leqslant M(A) \leqslant \|A\|$, $\|A\| = \max\{|m(A)|, |M(A)|\}$.
- *Lemma:* $B \in L(H)$ symmetrisch, $B \geqslant 0$
  $\Rightarrow \|B x\|^4 \leqslant \langle B x, x\rangle \|B\|^3 \|x\|^2$.

  ($\|B x\|^4 = \langle B x, y := B x\rangle^2 \leqslant (10.1) \langle B x, x\rangle\langle B y, y\rangle = \langle B x, x\rangle\langle B^3 x, x\rangle$.)
- *Satz 10.4:* $A \in L(H)$ symmetrisch
  - H komplex $\Rightarrow \|R_\lambda(A)\| \leqslant 1/|\mathrm{Im}\,\lambda|$ für alle $\lambda \notin \mathbb{R}$,

(Beweis von 3.5(5): (beachte $\lambda \in \rho(A)$)

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\,\lambda| \|x\| &\leqslant \|(\lambda I - A)x\| \\ |\mathrm{Im}\,\lambda| \left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| &\leqslant \|x\| \\ \|R_\lambda(A)\| &\leqslant 1/|\mathrm{Im}\,\lambda|.) \end{aligned}$$

- ◦ $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]$, $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.

  (Ang. $\lambda \in (-\infty, m(A)) \cap \sigma(A)$.
  $T := A - \lambda I \geqslant 0$ $(m(T) = m(A) - \lambda > 0)$
  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow 0 \in \sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$. $\|x_n\| = 1$, $T x_n \to 0$.
  $0 \leqslant \langle T x_n, x_n \rangle \leqslant \|T x_n\| \|x_n\| = \|T x_n\| \to 0 \Rightarrow m(T) \leqslant 0$. W!)

- *Satz 10.5:* Eine monotone und (durch einen sym. Operator $B \in L(H)$) beschränkte Folge symmetrischer Operatoren konvergiert punktweise.

  ($x \in H$. $n > m$ OBdA $A_n \geqslant A_m$. $\|(A_n - A_m)x\|^4 \leqslant C \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \|x\|^2$.
  $\langle A_n x, x\rangle$ ist monoton und beschr. $\Rightarrow$ CF $\Rightarrow$ $A_n x$ CF.)

11 Der Funktionalkalkül für symmetrische Operatoren

Sei stets H komplexer HR, $A \in L(H)$ symmetrisch. $m := m(A)$, $M := M(A)$.
$\mathcal{P} := \mathbb{R}[X]$, $\mathcal{P}^+ := \{p(\sigma(A)) \geqslant 0\}$.
Beachte: $p \in \mathcal{P} \Rightarrow p(A)$ symmetrisch

- *Satz 11.1:*
  - ◦ $A \geqslant 0 \Leftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty)$,
  - ◦ $p \in \mathcal{P}^+ \Rightarrow p(A) \geqslant 0$,

    $(\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \subset [0, \infty) \Rightarrow p(A) \geqslant 0$ (vgl. 8.7))
  - ◦ $p, q \in \mathcal{P}$ mit $p \leqslant q$ auf $\sigma(A) \Rightarrow p(A) \leqslant q(A)$,
  - ◦ $(p_n) \subset \mathcal{P}^+$ mit $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ auf $\sigma(A)$
    - – $\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$

      (monoton und beschränkt)
    - – $\exists B \in L(H)$ symmetrisch: $p_n(A) \to B$ punktweise

      ((3) und 10.5)

- *Satz 11.2: Monotone Grenzwertbildung erhält $\leqslant$*
  $(p_n), (q_n) \subset \mathcal{P}^+$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ auf $\sigma(A)$,
  $f, g: \sigma(A) \to [0, \infty)$, $p_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $q_n(\lambda) \to g(\lambda)$, (vgl. 11.1(4.i))
  $f \leqslant g$ auf $\sigma(A)$
  $B, C \in L(H)$ symmetrisch, $p_n(A) \to B$, $q_n(A) \to C$, (vgl. 11.1(4.ii))
  $\Rightarrow B \leqslant C$.

  (**Idee:** Dini
  $k \in \mathbb{N}$ fest. $r_n(\lambda) := \max\{0, p_n(\lambda) - q_k(\lambda)\}$. $r_n \to 0$ pw monoton auf $\sigma(A) \Rightarrow$ (Dini) glm.
  $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \forall n \geqslant n_0$: $0 \leqslant r_n < \varepsilon$ auf $\sigma(A) \Rightarrow p_n - q_k < \varepsilon$ auf $\sigma(A)$ für $n \geqslant n_0$.
  $\Rightarrow$ $(n \to \infty, \varepsilon \to 0, k \to \infty)$ $\langle B x, x\rangle - \langle C x, x\rangle \leqslant 0$.)

- *Definition:* $f: \sigma(A) \to [0, \infty)$
  $f \in \mathcal{L}^+ :\Leftrightarrow \exists (p_n) \subset \mathcal{P}^+$ monoton fallend auf $\sigma(A)$, $p_n(\lambda) \to f(\lambda)$ für $\lambda \in \sigma(A)$.
  Dann: (p_n) *zulässig* für f.
  Dann: setze $f(A)$ nach 11.1(4). (11.2 $\Rightarrow$ unabh. von Wahl der Folge)

- *Satz 11.3:* $f, g \in \mathcal{L}^+$, $\alpha \geqslant 0$, $T \in L(H)$, $TA = AT$
  - $f(A) \geqslant 0$ sym.,
    $\alpha f \in \mathcal{L}^+$,
    $f + g \in \mathcal{L}^+$,
  - $f g \in \mathcal{L}^+$,
    $(f g)(A) = f(A) g(A) = g(A) f(A)$,

    ((p_n) zulässig für f, (q_n) zulässig für $g \Rightarrow (p_n q_n)$ zulässig für $f g$.
    $\langle (f\ g)(A)x,\ x\rangle = \lim\ \langle (p_n q_n)(A)x,\ x\rangle = \lim\ \langle p_n(A) q_n(A)x,\ x\rangle = \lim$ $\langle q_n(A)x, p_n(A)x\rangle = \lim \langle p_n(A)x, q_n(A)x\rangle$.)
  - $f \leqslant g$ auf $\sigma(A) \Rightarrow f(A) \leqslant g(A)$,

    (11.2)
  - $T f(A) = f(A) T$.

    ($T p(A) = p(A) T\ \forall p \in \mathcal{P}^+$)
- *Definition:* $\mathcal{L} := \{f: \sigma(A) \to \mathbb{R}: \exists g, h \in \mathcal{L}^+: f = g - h\}$.
  Dann $f(A) := g(A) - h(A)$.

  (Wohldefiniertheit: $f = g - h = \tilde{g} - \tilde{h} \Rightarrow g + \tilde{h} = \tilde{g} + h \Rightarrow$ (11.3) $g(A) + \tilde{h}(A) = \tilde{g}(A) + h(A)$.)
- *Satz 11.4:* $f, g \in L(H)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $T \in L(H)$, $TA = AT$
  - $f(A)$ sym.,
    $\alpha f \in \mathcal{L}$,
    $f + g \in \mathcal{L}$,
  - $f g \in \mathcal{L}$,
    $(f g)(A) = f(A) g(A) = g(A) f(A)$,
  - $f \leqslant g$ auf $\sigma(A) \Rightarrow f(A) \leqslant g(A)$,
  - $T f(A) = f(A) T$.
- *Definition:* $C(\sigma(A), \mathbb{K}) := \{f: \sigma(A) \to \mathbb{K}: f \text{ stetig}\}$.
- *Satz 11.5:* $C(\sigma(A), \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$.

  (1. $f \in C(\sigma(A), \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$ auf $\sigma(A) \Rightarrow \forall n \exists p_n$: $f + 1/(n+1) \leqslant p_n \leqslant f + 1/n$.
  2. f^+, f^- usw.)
- *Satz 11.6:* $A \geqslant 0$
  $\Rightarrow \exists_1 B \in L(H)$: B symmetrisch, $B \geqslant 0$, $B^2 = A$.
  (Bez. „Wurzel“, $B = A^{1/2}$)

  (Existenz: $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$, $f \in \mathcal{L}^+$, $B := f(A)$
  Eindeutigkeit: **Idee:** Binomi, dann $\sqrt{\sqrt{A}}$.
  Nimm an, C auch. $\Rightarrow C\ A = C\ C^2 = A\ C$, d.h. C kommutiert mit A, also auch mit $B = f(A)$.
  $(B - C)(B + C) = B^2 - C^2 = 0 \Rightarrow$ auf $\overline{B + C(H)}$ gilt $B = C$.
  $D \in L(H)$ sym., $D \geqslant 0$, $D^2 = B$, $z \in \overline{B + C(H)}^{\perp} = N(B + C)$.
  $\Rightarrow \|D\ z\|^2 = \langle D^2 z, z\rangle = \langle B\ z, z\rangle \leqslant \langle B\ z, z\rangle + \langle C\ z, z\rangle = \langle (B + C)z, z\rangle = 0 \Rightarrow$ $B\ z = 0 \Rightarrow C\ z = 0$ (falls nicht, dann $\notin N(B + C)$) $\Rightarrow B = C = 0$ auf $N(B + C)$.)
- *Satz 11.7:* $f \in \mathcal{L}$, $(f_n) \subset \mathcal{L}$
  - f ist auf $\sigma(A)$ beschränkt und $\|f(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|$,

($f \in \mathcal{L}^+$: (p_n) sei zulässige Folge $\Rightarrow 0 \leqslant f \leqslant p_1$ auf $\sigma(A)$, dies überträgt sich auf $f \in \mathcal{L}$.
$f \in \mathcal{L}$: $L := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \Rightarrow$ (via $\langle f(A)x, x\rangle$) $\|f(A)\| \leqslant L$.)

- $f_n \to f$ glm $\Rightarrow f_n(A) \Longrightarrow f(A)$.

  (folgt aus (1))

- *Definition:* $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} := \{u: \sigma(A) \to \mathbb{C}: \operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u \in \mathcal{L}\}$,
  Def $u(A)$ naheliegend.
- *Satz 11.8:*
  - $C(\sigma(A), \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$,

    (s. 11.5)
  - $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Rightarrow u(A)$ normal, u auf $\sigma(A)$ beschränkt, $\|u(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |u(\lambda)|$,

    (Beschränktheit auf $\sigma(A)$: 11.7,
    Nachrechnen $u(A)^* = \bar{u}(A)$. Normalität folgt.
    $\|u(A)\|^2 =_{2.16} \|u(A)u(A)^*\| = \left\|f(A)^2 + g(A)^2\right\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |u(\lambda)|^2$.
  - $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$, $(u_n) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$, $u_n \to u$ glm $\Rightarrow u_n(A) \Longrightarrow u(A)$,

    (folgt aus Punkt 2)
  - *Spektraler Abbildungssatz:* $u \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$
    - $u(\sigma(A)) = \sigma(u(A))$

      ($\subset$: **Idee:** W! zum "spektralen Abb.satz" für Polynome
      $\mu_0 \in u(\sigma(A))$, OBdA $\mu_0 = 0$. $\exists \lambda_0 \in \sigma(A)$: $u(\lambda_0) = 0$. Nimm an $0 \in \rho(A) \Rightarrow u(A) \in L(H)^{-1}$.
      Sei $\varepsilon > 0$ so, dass für $T \in L(H)$ mit $\|T + u(A)\| < \varepsilon \Rightarrow T \in L(H)^{-1}$. Finde Polynom, das u auf σ approximiert. Dann $p(\lambda_0)I - p(A) \in L(H)^{-1}$, also $p(\lambda_0) \in \rho(p(A))$. Für Polynome gilt aber der spektrale Abbildungssatz nach Kap. 8. W!
      $\supset$: **Idee:** $u(A)u^*(A)$ normal.
      $\mu_0 \in \sigma(u(A))$, OBdA $\mu_0 = 0$. $\Rightarrow$ (9.1) $\exists (x_n) \subset H$: $\|x_n\| = 1$, $u(A)x_n \to 0$.
      $f := |u|^2$, $f(A)$ symmetrisch, $\beta := \min f(\sigma(A)) \Rightarrow \beta I \leqslant f(A) = u(A)^* u(A)$. Normalität von $f \Rightarrow 0 \leqslant \beta \leqslant \|u(A)x_n\|^2 \to 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \sigma(A)$: $f(\lambda_0) = 0 \Rightarrow u(\lambda_0) = 0 \in u(\sigma(A))$.)
    - $\|u(A)\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |u(\lambda)|$,
    - $u(A)$ sym. $\Leftrightarrow u$ reellwertig (auf $\sigma(A)$)

      ($\Rightarrow u(A)$ sym. $\Rightarrow \sigma(u(A)) \subset \mathbb{R} \Rightarrow u(\sigma(A)) \subset \mathbb{R}$
      $\Leftarrow$ klar)
- *Bemerkung:*
  $\mathcal{H}(A) \subset C(\sigma(A), \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$
  $f_h(A)$ sei der Operator $f(A)$ nach Kapitel 8.
  $f_s(A)$ sei der Operator $f(A)$ nach Kapitel 11.
- *Satz 11.9:* $f \in \mathcal{H}(A)$
  $\Rightarrow f_h(A) = f_s(A)$

  (Nach Runge: $(r_n) \subset \mathbb{C}(X) \subset \mathcal{H}(A)$, $r_n \to f$ lokal glm auf D_f.
  $R_k := (r_k)_h(A)$. Rationale Funktionen kann man aber auch nur für Operatoren hinschreiben, dafür braucht man keinen Funktionalkalkül. Nach 8.3 und 11.4 ist damit auch $R_k = (r_k)_s(A)$.

Wg. 8.4: $R_k \Longrightarrow f_h(A)$
Wg. 11.8(3): $R_k \Longrightarrow f_s(A)$
$\Rightarrow$ Die beiden sind gleich.)

12 Aus den Übungen

- *Satz von Lax-Milgram:* H reeller HR, $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear, $\exists \alpha > 0\colon a(x, x) \geqslant \alpha \|x\|^2$, $\exists C > 0\colon |a(x, y)| \leqslant C \|x\| \, \|y\|$
  - $\exists T \in L(H)$:
    - $\exists T \in L(H)\colon a(x, y) = \langle Tx, y \rangle$
    - $\overline{T(H)} = H$
    - $x \in H \Rightarrow \|Tx\| \geqslant \alpha \|x\|$
    - $T\colon H \to H$ stetiger Isomorphismus
  - $\varphi \in H' \Rightarrow \exists_1 h \in H$:
    - $x \in H \Rightarrow a(h, x) = \varphi(x)$
    - $a(x, y) = a(y, x) \Rightarrow h$ ist Lsg der Extremwertaufgabe $\Phi(h) = \min_{x \in H} \Phi(x)$, wobei $\Phi(x) = 1/2 a(x, x) - \varphi(x)$.

13 Beachte

- Warum in Kapitel 8 immer $\sigma(x) \subset D$?
  Etwas nicht bijektives sollte nicht im Nenner stehen. $(\alpha e - x)$ ist nicht bijektiv, wenn $\alpha \in \sigma(x)$. Wenn man dann fordert, dass $\alpha \in D$, so weiss man, dass $(\alpha - \lambda)$ kein (wesentlicher) Faktor im Nenner ist.
  Beispiel: Ist x nicht bijektiv, so ist $0 \in \sigma(x)$. Man fordert dann mit $\sigma(x) \subset D$, dass man 0 in die Funktion einsetzen kann, dass also nicht durch x dividiert wird.
- Hahn-Banach braucht keine Banachräume.